1章　2次方程式

要点

例題 1

次の問いに答えなさい.

(1) 次の数の分母を有理化しなさい.

① $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$　　② $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

(2) $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$, $y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ のとき, x^2+y^2, $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ の値を求めなさい.

(3) $a>0$, $b>0$ のとき, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ を展開することにより, 次の式が成り立つことを示しなさい.

$$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

$$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}\quad（ただし, a>b）$$

(4) 次の二重根号をはずしなさい.

① $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$　　② $\sqrt{11-\sqrt{96}}$

■考え方 平方根と平方根の計算

▼ 平方根

2乗すると a になる数を **a の平方根**という（ただし, $a \geqq 0$).
a の平方根は普通, 正であるものと負であるものの2つあり, その2つの絶対値は等しい.

＜例＞　2乗して4になる数　$+2$ と -2

ただし, $a=0$ のときは, 平方根は1つしかない. つまり, 0の平方根は0だけ.

$a<0$ のとき, 2乗してマイナスになる数はないので, a の平方根はない.

注)
$$(\text{正の数})^2=(\text{正の数})\times(\text{正の数})=(\text{正の数})$$
$$(\text{負の数})^2=(\text{負の数})\times(\text{負の数})=(\text{正の数})$$
$$0^2=0$$

となるので, 2乗してマイナスになる数はない.

▼ 根号

a の平方根のうち, 正のほうを $\boldsymbol{\sqrt{a}}$ と表し, **ルート a** と読む. $\sqrt{}$ はルートまたは**根号**と呼ばれる記号である. 平方根のうち, 負のほうは根号を用いて $-\sqrt{a}$ と表される.

＜例＞　$\sqrt{4}=2$

4の平方根は $\sqrt{4}$ と $-\sqrt{4}$（つまり, 2と -2）

この根号を用いると, 5の平方根のような整数または分数で表すことができない数も $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$ と表すことができる.

▼ 複号

　2 と -2，$\sqrt{5}$ と $-\sqrt{5}$ のように，絶対値が同じであるが符号のみが違う 2 つの数を一度に ± 2，$\pm\sqrt{5}$ のように表す．この記号 $\pm$ を**複号**という．

▼ $a\sqrt{b}$ の形

　$a \times \sqrt{b}$ のことを $a\sqrt{b}$ とかく．

▼ 平方根の性質

　a の平方根 $\pm\sqrt{a}$ とは，2 乗すると a になる数のことであった(ただし $a \geqq 0$)．この定義から次の式が必ず成立する．

$$a \geqq 0 \text{ のとき，} \begin{cases} (\sqrt{a})^2 = a \\ \sqrt{a^2} = a \\ \sqrt{(-a)^2} = a \end{cases}$$

＜確認＞

$\sqrt{\quad}$ は 2 つの平方根のうち正の値のほうを表す記号だったので，必ず正．したがって，$a \geqq 0$ のとき，

$$\sqrt{a^2} = |a| = a, \quad \sqrt{(-a)^2} = |-a| = a$$

となる．

▼ 根号の外にある数を根号の中に入れる

　$a > 0$ のとき，$\sqrt{a^2} = a$ より，$a = \sqrt{a^2}$．よって，次の式が成り立つ (a，b は正).

$$\boldsymbol{a\sqrt{b}} = \sqrt{a^2}\sqrt{b} = \boldsymbol{\sqrt{a^2 b}}$$

▼ 根号の中にある平方数を根号の外に出す

　根号の中の数が平方数と他の数の積で表されるとき，根号の中の数字を小さくすることができる．この作業を**根号の簡約化**という．ルートを含む計算では，根号の簡約化により根号の中の値をなるべく小さくして計算することが，計算を上手に行うための大きなポイントになる．

$$\boldsymbol{\sqrt{a^2 b}} = \sqrt{a^2}\sqrt{b} = \boldsymbol{a\sqrt{b}} \quad (a,\ b \text{ は正})$$

＜例＞

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{18}$$
$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$$
$$\sqrt{200} = \sqrt{10^2 \times 2} = 10\sqrt{2}$$

(簡約化を行わない場合) $\sqrt{48} \times \sqrt{98} = \sqrt{48 \times 98} = \sqrt{4704} = \ldots$

(簡約化を行った場合) $\sqrt{48} \times \sqrt{98} = 4\sqrt{3} \times 7\sqrt{2} = 4 \times 7 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} = 28\sqrt{6}$

▼ 平方根の乗法・除法

　$a > 0, b > 0$ のとき，次の式が成り立つ．

$$\boldsymbol{\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}}$$
$$\boldsymbol{\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}}$$

＜例＞

$$\begin{cases}\sqrt{4}\times\sqrt{9}=2\times3=6\\ \sqrt{4\times9}=\sqrt{36}=6\end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}\dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{9}}=\dfrac{12}{3}=4\\ \sqrt{\dfrac{144}{9}}=\sqrt{16}=4\end{cases}$$

▼ 平方根の加法・減法

根号の簡約化 $\begin{cases}\text{根号の中が同じ数のとき}\\ \qquad\qquad\qquad\to \boldsymbol{m\sqrt{a}\pm n\sqrt{a}=(m\pm n)\sqrt{a}}\quad\text{（複号同順）}\\ \text{根号の中が違う数のとき}\\ \qquad\qquad\qquad\to \text{それ以上簡単にならない}\end{cases}$

▼ 乗法公式・因数分解の利用

乗法公式の形を含む計算や因数分解の利用もよく現れる．乗法公式・因数分解の公式を確認しておこう．

▼ 平方の公式

$$\boldsymbol{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$
$$\boldsymbol{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

▼ 和と差の積の公式

$$\boldsymbol{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

▼ 1 次式の積の公式

$$\boldsymbol{(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab}$$

▼ 分母の有理化

分数の分母に根号があるとき，分母に根号がない形に変形することを**分母の有理化**という．そのためには，分母にある平方根を，分母と分子にそれぞれかければよい．

＜例＞ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$ ［$2\sqrt{3}$ を分母分子にかける必要はない］

根号の有理化によって，一見異なるように見える根号どうしが，実は同じ値であることがわかることがある．根号を含んだ式の計算で見通しをつけるために，分母の有理化も原則として行うようにする．

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\times\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}}$$
$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\times\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}}$$

▼ 分母が和や差の形で表されているときの有理化

$$\boldsymbol{\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{c\times(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\times(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}}$$
$$\boldsymbol{\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{c\times(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\times(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}}$$

■考え方 根号を含む式の計算の工夫

▼ 対称式の式の値

x と y を入れ替えても式が変わらない式のことを**対称式**という．対称式の値を求める際には，x と y の和と積（$x+y$ と xy）の値を先に求めておき，求める式の値をこの $x+y$ と

xy で表すようにすると，計算が楽になることが多い．このときには，乗法公式や因数分解の公式をうまく活用して，これらの公式を変形した形を利用する．

＜例＞　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

　（平方の公式 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ を変形した，$(x+y)^2-2xy=x^2+y^2$ を利用している.）

▼ 多項式の式の値

多項式に根号を含む値を代入するとき，根号の計算が大変になることがある．これは主として，根号を含む式を 2 乗，3 乗とするときに，根号を含む部分と根号を含まない部分とが入り交じるためである．そこで，根号の計算をしなくてすむように，あらかじめ与えられた文字式を変形し，根号を 2 乗してなくしてしまう変形をすることがある．この方法はより複雑な式に根号を含む値を代入するときに用いられる方法である．

＜例＞　$x=5+\sqrt{2}$ のとき，$x-5=\sqrt{2}$ より，$(x-5)^2=2$．さらにこの式を変形すると，

$$x^2-10x+25=2$$

$$\therefore x=5+\sqrt{2}\text{のとき，} x^2-10x+23=0$$

注）$x=5+\sqrt{2}$ をそのまま 2 乗したのでは，$x^2=25+10\sqrt{2}+2=27+10\sqrt{2}$ となって，根号が残ってしまう．これを避けるために，5 を移項して右辺を $\sqrt{2}$ だけにしてから 2 乗している．

▼ 二重根号

根号の中にさらに根号が入ったものを**二重根号**という．

一般に二重根号は簡単にはならないが，

$$\sqrt{A\pm2\sqrt{B}}$$

という形に変形できて，さらに $A=a+b$，$B=ab$ という 2 つの正の数 a，b がある場合は，

$$\begin{aligned}\sqrt{A\pm2\sqrt{B}}&=\sqrt{(a+b)\pm2\sqrt{ab}}\\&=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\quad\text{（ただし，}a>b\text{）（複号同順）}\end{aligned}$$

のように簡単になる．この操作を**二重根号をはずす**という．

■解答

(1) ①

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\boldsymbol{\sqrt{2}-1}$$

② $$\frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\{(2+\sqrt{2})+\sqrt{6}\}\{(2+\sqrt{2})-\sqrt{6}\}}$$
$$= \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{(2+\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}$$
$$= \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4+4\sqrt{2}+2-6}$$
$$= \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4\sqrt{2}}$$
$$= \frac{(2+\sqrt{2}-\sqrt{6})\times\sqrt{2}}{4\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}+2-2\sqrt{3}}{4\times 2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{3}}{4}}$$

(2) $x+y=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $xy=\dfrac{1}{4}$

よって，$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-2\times\dfrac{1}{4}=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{3}{4}\div\dfrac{1}{4}=\mathbf{3}$

(3) $$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$$
$$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} \quad (\because\ \sqrt{a}>0,\ \sqrt{b}>0\ \text{より}\ \sqrt{a}+\sqrt{b}>0)$$
$$\therefore\ \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

同様に，

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2=a+b-2\sqrt{ab}$$
$$\therefore\ \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b} \quad (a>b\ \text{より}\ \sqrt{a}-\sqrt{b}\text{は正})$$

(4) ① $$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(1+2)+2\sqrt{1\times 2}}=\sqrt{1}+\sqrt{2}=\mathbf{1}+\boldsymbol{\sqrt{2}}$$

② $$\sqrt{11-\sqrt{96}}=\sqrt{11-2\sqrt{24}} \quad [\text{根号の中の根号の前に 2 が必要}]$$
$$=\sqrt{(8+3)-2\sqrt{8\times 3}}$$
$$=\sqrt{8}-\sqrt{3}$$
$$=\boldsymbol{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

例題 2

$\sqrt{5}+\sqrt{3}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$\dfrac{2}{a+b}+a-b$ の値を求めなさい．

■考え方 整数部分と小数部分

根号を含む数は一般に無理数のため，その中に整数部分と小数部分を含む．

$$\sqrt{2}=\underbrace{1}_{\text{整数部分}}.\underbrace{41421356\cdots\cdots}_{\text{小数部分}}$$

根号を含む数の**整数部分**は，**その数をはさむ差が 1 の整数の組**を見つければよい．このとき，根号の中が平方数の場合，その数は整数となることを利用する．

つまり，$0<a<\sqrt{b}<a+1 \iff \sqrt{a^2}<\sqrt{b}<\sqrt{(a+1)^2}$

＜例＞　$1=\sqrt{1^2}=\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$

よって，$\sqrt{2}$ は 1 より大きく，2 より小さい．

よって，その整数部分は 1．

◆ここに注意◆

この方法を用いるためには，根号の中の数をはさむ**平方数**を見つける必要がある．したがって，平方数とそのもとの数の組を頭に入れておく必要がある．

〔確認〕 平方数

もとの数 a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
平方数 a^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196

整数部分がわかれば，**もとの数からその整数部分を引いた数が小数部分**になる．

すなわち，ある数 x の整数部分が a，小数部分が b のとき，$x=a+b$ が成り立つから，$b=x-a$

＜例＞　$\sqrt{2}$ の整数部分が 1 なので，$\sqrt{2}$ の小数部分は $\sqrt{2}-1$

（これは実際には

$$\sqrt{2}-1=1.4142135623730950488\cdots-1=0.4142135623730950488\cdots$$

ということを行っている）

■解答

$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{15}+3=8+2\sqrt{15}=8+\sqrt{60}$

$7<\sqrt{60}<8$ より，

$$15<\quad 8+\sqrt{60}\quad<\quad 16$$
$$15<\quad (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2\quad<\quad 16$$
$$(3<)\quad \sqrt{15}<\quad \sqrt{5}+\sqrt{3}\quad<\quad 4$$

$\sqrt{5}+\sqrt{3}$ の整数部分 a は，$a=3$

よって，小数部分 b は，$b = \sqrt{5} + \sqrt{3} - 3$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{a+b} + a - b &= \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + 3 - (\sqrt{5} + \sqrt{3} - 3) \\
&= \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} + 6 - \sqrt{5} - \sqrt{3} \\
&= \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} + 6 - \sqrt{5} - \sqrt{3} \\
&= \sqrt{5} - \sqrt{3} + 6 - \sqrt{5} - \sqrt{3} \\
&= \mathbf{6 - 2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

例題 3

次の問いに答えなさい.

(1) $ax^2+bx+c=0$ の x の係数 b が偶数の場合，別の数 b' を用いて，$b=2b'$ と表すことができる．このときの解の公式を a, b', c を用いて表しなさい.

(2) 次の 2 次方程式を (1) で導いた式を利用して解きなさい.

① $x^2-12x+5=0$　　② $x^2-18x+21=0$

③ $3x^2+8x-8=0$　　④ $3x^2+26x-29=0$

■考え方 2 次方程式の解法

2 次方程式の解法は次のような手順で行う.

(i) 平方根の考え方の利用

$(x+p)^2=k$ ならば $x=-p\pm\sqrt{k}$ （$k \geqq 0$）

平方根の考え方が適用できる場合はそれで処理する（この場合は必ずしも (左辺) $=0$ の形に整理する必要はない）

(ii) 因数分解の利用

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$ ならば $x=\alpha, \beta$

平方根の考え方が使えないときは，(左辺) $=0$ の形に整理にまず整理する．そして，左辺の因数分解の可能性を検討する．このとき (左辺) $=0$ とおいて，その 2 次方程式の判別式 D が平方数であるかどうかを判定する方法を使うことができる.

(iii) 解の公式の利用

$ax^2+bx+c=0$ ならば $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

因数分解ができない場合は解の公式を適用する

以上において，どの解法を選ぶかの見通しがつけやすいように，方程式を整理することが大切である.

① **係数に公約数がある場合には両辺をその公約数で割る**

② **係数に分数や小数がある場合は両辺に適当な数をかけて整数の係数に直す**

③ **$\boldsymbol{x^2}$ の係数がマイナスの場合には両辺に $\boldsymbol{-1}$ をかけて，$\boldsymbol{x^2}$ の係数をプラスにする**

④ **共通部分などは別の文字で置き換えてみる**

■考え方 偶数係数の解の公式

解の公式はどんな場合にでも解を求められるという点では便利であるが，係数が大きくなると計算が面倒になるという欠点を持つ．特に分子の平方根の中の値が大きくなる場合は，その簡約化が見つけにくく，簡約化によって解が簡単になることに気がつかずに面倒な値のまま計算を続けてしまいがちである.

実は，上の例題に見るように，x の係数が偶数の場合は，必ず，根号が簡約化され，分母分子を 2 で約分することができ，結果が簡単になる．そこで，x の係数が偶数の場合は例題の結果を公式として覚えておき，活用できるようにしておく．これにより，計算時間を短くし，何より，ケアレスミスを減らすことができる．また，計算の手間を減らすことで，解答

全体の流れが見やすくなるという効果もある．是非使えるようにしたい．

さらに，この偶数係数の公式の根号の中身 b'^2-ac に注目する．この値は次のように，もとの公式中の判別式の値の $\dfrac{1}{4}$ にあたっている．

$$\begin{aligned} D &= b^2-4ac=(2b')^2-4ac=4(b'^2-ac) \\ \therefore \frac{D}{4} &= b'^2-ac \end{aligned}$$

判別式はその値が正か，0 か，負か，が問題であったので，4 分の 1 された値であっても，その役割を果たすには十分である．そこで，x の係数が偶数の場合には

$$D/4=b'^2-ac$$

を判別式として用いることができる．これも計算量が大幅に減るので，計算時間の短縮およびケアレスミスの防止に大きな効果を上げる．

注 1）慣習として $D/4$ という表現を用いることが多いが，$\dfrac{D}{4}$ としてももちろんかまわない．

注 2）4 は平方数であるから，D が平方数であるかの判定を $D/4$ を用いて行うこともできる（大きな数となると平方数の判定が大変になるので，この点でも $D/4$ は大きな効果を上げることができる）．

◆ここに注意◆

解の公式や判別式自体がまだしっかり身に付いていないと，この偶数係数の公式を学ぶことでかえって混乱が生じることがある．公式を正確に身につけよう．

■解答

(1) 解の公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ の b に $2b'$ を代入すると，

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a} \end{aligned}$$

この式の分母分子を 2 で割ると

$$\boldsymbol{x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}}$$

(2) ① $x=6\pm\sqrt{36-5}$　［x^2 の係数が 1 のときは分数にする必要がない］

$\boldsymbol{x=6\pm\sqrt{31}}$

② $x=9\pm\sqrt{81-21}=9\pm\sqrt{60}=\boldsymbol{9\pm2\sqrt{15}}$

［そのまま解の公式を適用すると，

$$x=\frac{18\pm\sqrt{324-84}}{2}=\frac{18\pm\sqrt{240}}{2}=\frac{18\pm4\sqrt{15}}{2}=9\pm2\sqrt{15}$$

となって，かなり手間がかかる］

③

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+24}}{3}=\frac{-4\pm\sqrt{40}}{3}=\boldsymbol{\frac{-4\pm 2\sqrt{10}}{3}}$$

[そのまま解の公式を適用すると,

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{64+96}}{6}=\frac{-8\pm\sqrt{160}}{6}=\frac{-8\pm 4\sqrt{10}}{6}=\frac{-4\pm 2\sqrt{10}}{3}\quad]$$

④

$$\begin{aligned}x=\frac{-13\pm\sqrt{169+87}}{3}&=\frac{-13\pm\sqrt{256}}{3}\\&=\frac{-13\pm 16}{3}\\&=\boldsymbol{1,\ -\frac{29}{3}}\end{aligned}$$

[そのまま解の公式を適用すると,

$$x=\frac{-26\pm\sqrt{676+348}}{6}=\frac{-26\pm\sqrt{1024}}{6}=\frac{-26\pm 32}{6}=1,\ -\frac{29}{3}$$

もちろん,$(x-1)(3x+29)=0$ と因数分解するのが最も速い解法]

例題 4

x についての方程式

$$2x^2-(4a+3)x+2a^2+4a+1=0$$

が解をもつときの a についての条件をもとめなさい.

■考え方 判別式

x についての 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

と与えられるので,その解の個数は,根号の中の符号によって決まった.そこで,この根号の中身 b^2-4ac の値を判別式といい,記号 D を用いて表すのであった.すると,その解の個数は,

判別式 $D=b^2-4ac$	$ax^2+bx+c=0$ の解
$D=b^2-4ac>0$	2 つの異なる解
$D=b^2-4ac=0$	ただ 1 つの解(重解)
$D=b^2-4ac<0$	解なし

のように分類することができるのであった.

さらに,**例題 3** で確認したように,x の係数が偶数の場合は,$b=2b'$ となる b' を用いて,

$$\boldsymbol{D/4=b'^2-ac}$$

を判別式として用いることができる.

■解答

x^2 の係数は 2

x の係数は $-(4a+3)$

定数項は $2a^2+4a+1$

よって，判別式 D は

$$\begin{aligned} D &= \{-(4a+3)\}^2 - 4 \times 2 \times (2a^2+4a+1) \\ &= 16a^2+24a+9-16a^2-32a-8 \\ &= -8a+1 \geqq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \boldsymbol{a \leqq \frac{1}{8}}$$

例題 5

次の式の値を求めなさい.

(1) 2 次方程式 $3x^2+5x+1=0$ の 2 つの解を α, β とするとき, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ の値

(2) 2 次方程式 $2x^2-6x-3=0$ の負の解を β とするとき, $2\beta^3-4\beta^2-\beta-5$ の値

■考え方

▼ 解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0(a \fallingdotseq 0)$ の 2 つの解を α, β とするとき, 次の関係式が成り立つ.

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=-\frac{b}{a}} \qquad \boldsymbol{\alpha\beta=\frac{c}{a}}$$

これを 2 次方程式の **解と係数の関係** という.

≪証明≫

$$ax^2+bx+c=0$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ここで, $\alpha=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\beta=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ とすると（α, β の置き方は逆でもかまわない）

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{-2b}{2a}\\&=-\boldsymbol{\frac{b}{a}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}\\&=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}\\&=\frac{4ac}{4a^2}\\&=\boldsymbol{\frac{c}{a}}\end{aligned}$$

≪別証明≫

$$ax^2+bx+c=0 \text{ の解が}\alpha,\ \beta$$
$$\Longleftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \ \cdots ① \text{ の解が}\alpha,\ \beta$$

よって, ① は

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \ \cdots\cdots ②$$

と因数分解できる．② を展開すると，

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \quad \cdots\cdots ②'$$

① と ②′ は同じ式なので，両辺の係数を比較して，

$$\frac{b}{a}=-(\alpha+\beta) \quad , \quad \frac{c}{a}=\alpha\beta$$

よって

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \quad , \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

が成り立つ．

▼ 解と係数の関係の利用

2 次方程式の 2 つの解，α，β についての**対称式**の値を求めるときは，**基本対称式**である $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ の値を解と係数の関係を用いて求めておき，これらで目的の対称式を表せばよい．

注）対称式

$\alpha^2+\beta^2$，$2\alpha\beta$ など，α，β を入れかえても，式が変わらない式

注）基本対称式

2 文字のときは和 $\alpha+\beta$，積 $\alpha\beta$ を指す

▼ 解の値を代入した文字式の値

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ の 1 つの解が α のとき，当然

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0$$

が成り立つ．この式を変形すると

$$\alpha^2=-\frac{b}{a}\alpha-\frac{c}{a}$$

という式を得る．この式は α^2 の値を 2 乗することなく 1 次式の計算によって求めることができることを示している．これを利用して，式の値を簡単に求められることがある．

■解答

(1) 解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-\frac{5}{3}\ ,\ \ \alpha\beta=\frac{1}{3}$$

だから，

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=-\frac{5}{3}\times\frac{3}{1}=\boldsymbol{-5}$$

(2) $2x^2-6x-3=0$ の解は，

$$x=\frac{3\pm\sqrt{3^2+2\times 3}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{15}}{2}$$

$\beta<0$ より，$\beta=\dfrac{3-\sqrt{15}}{2}$

$2\beta^2-6\beta-3=0$ が成り立つから，

$$2\beta^2=6\beta+3$$

これを求める式に代入して，

$$\begin{aligned}&\beta(6\beta+3)-4\beta^2-\beta-5\\&=2\beta^2+2\beta-5\\&=(6\beta+3)+2\beta-5\\&=8\beta-2\\&=8\times\frac{3-\sqrt{15}}{2}-2\\&=\boldsymbol{10-4\sqrt{15}}\end{aligned}$$

例題 6

次の連立方程式を解きなさい.

(1)
$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x^2 & \cdots\cdots ① \\ y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{15}{4} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} x^2 + 3y = 0 & \cdots\cdots ① \\ 2x - 3y = 1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

■考え方 連立方程式の解法（確認）

▼ 連立方程式の解法

代入法と**加減法**　一般には加減法を用いることが多い

いずれの方法も，1 文字を消去して 1 元 1 次方程式とすることが目標

▼ 連立 2 次方程式

未知数が複数あり，方程式も複数あるとき，方程式の数 ≧ 未知数の数 ならば，一般に未知数の値を求めることができる．その最も簡単なケースが (2 元) 連立 1 次方程式であったが，例題に見るように，2 次方程式と 1 次方程式を連立した連立方程式 (2 元連立 2 次方程式) も考えることができる．

その解法としては，1 次方程式のときと同様に，加減法か消去法によって，文字の種類を減らすことによる (1 次のときは加減法が多く使われるが，2 次では代入法が多く使われる)．一文字となったときの方程式は普通 2 次方程式になる．

■解答

(1) ① と ② より，

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x^2 &= \frac{1}{2}x + \frac{15}{4} \\ x^2 &= 2x + 15 \\ x^2 - 2x - 15 &= 0 \\ (x+3)(x-5) &= 0 \\ x &= -3,\ 5 \end{aligned}$$

① より，

$x = -3$ のとき　$y = \dfrac{1}{4}x^2 = \dfrac{9}{4}$

$x = 5$ のとき　$y = \dfrac{1}{4}x^2 = \dfrac{25}{4}$

$$\boldsymbol{(x,\ y) = \left(-3,\ \frac{9}{4}\right),\ \left(5,\ \frac{25}{4}\right)}$$

(2) ① + ② より,

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= 1 \\ x^2 + 2x - 1 &= 0 \\ x &= -1 \pm \sqrt{1+1} \\ &= -1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

② より,

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x-1}{3} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2} - 1}{3} \\ &= \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3} \text{(複号同順)} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{(x,\ y) = \left(-1+\sqrt{2},\ \frac{-3+2\sqrt{2}}{3}\right),\ \left(-1-\sqrt{2},\ \frac{-3-2\sqrt{2}}{3}\right)}$$