1章　比例と反比例（1）

要点

例題 1

次の (1)〜(4) のうち，y が x の関数であるものを番号で答えなさい．

(1) 周囲が 36 cm の長方形の縦の長さ x cm と横の長さ y cm

(2) x 冊の本の代金 y 円

(3) 200 L 入る水そうに毎分 5 L ずつの割合で水を入れるとき，入れ始めてから x 分後の水の量 y L

(4) 底辺の長さが x cm の二等辺三角形の面積 $y\,\mathrm{cm}^2$

【要点】

変数　いろいろな値をとる文字

変域　変数がとりうる値の範囲．ふつう，不等号を使って表す．

関数　変数 x と変数 y があって，x の値を決めるとそれに対応する y の値がただ 1 つ決まるとき，『y は x の関数である』という．

■解答

(1) x と y の関係を表にすると，下のように，x の値が 1 つ決まると，y の値は 1 つだけ決まる．

x (cm)	1	2	3	4	5	……
y (cm)	17	16	15	14	13	……

(2) 本によって代金がことなるから，x の値が 1 つ決まっても，y の値は 1 つに決まらない．

(3) x と y の関係を表にすると，下のように，x の値が 1 つ決まると，y の値は 1 つだけ決まる．

x (cm)	1	2	3	4	5	……	40
y (cm)	5	10	15	20	25	……	200

(4) 底辺の長さが決まっても，高さによって面積は異なるから，x の値が 1 つ決まっても，y の値は 1 つに決まらない．

以上より，y が x の関数であるのは，**(1)**，**(3)**

例題 2

次の問いに答えなさい.

(1) 次の式の中から，y が x に比例するものを選び，番号で答えなさい.

①$y = 4x$　②$x + y = 2$　③$2x = -3y$　④$\dfrac{2}{x} = \dfrac{5}{y}$

(2) 次の表で，y が x に比例するとき，空らんに適する数を入れなさい.

x	1	2	3	4	5	6	$\cdots\cdots$
y	3	6				18	$\cdots\cdots$

【要点】

比例　2 つの変数 x，y の間に，

$$y = ax \text{（a は 0 でない定数）}$$

という関係が成り立つとき，『y は x に比例する』という.

比例の性質　$y = ax$ のとき，次のことが成り立つ.

・$\dfrac{y}{x}$ は一定で，a に等しい.
　この a を**比例定数**という.（ただし，$x \fallingdotseq 0$）

・x の値が 2 倍，3 倍 $\cdots$ になると，y の値も 2 倍，3 倍 $\cdots$ になる.

・x の値が 1 増加するごとに，y の値は比例定数 a ずつ増加する.

■解答

(1) ① $y = 4x$ で，比例

② $y = -x + 2$ より，比例ではない

③ $y = -\dfrac{2}{3}x$ で，比例

④ $2y = 5x$ より，$y = \dfrac{5}{2}x$ で，比例

以上より，**①, ③, ④**

(2) 表から比例定数を求めると，

$$a = \frac{y}{x} = \frac{3}{1} = 3$$

よって，x と y の関係は $y = 3x$ だから，

x	1	2	3	4	5	6	$\cdots\cdots$
y	3	6	**9**	**12**	**15**	18	$\cdots\cdots$

例題 3

次の問いに答えなさい.

(1) 次の式の中から，y が x に反比例するものを選び，番号で答えなさい.

①$y = \dfrac{x}{2}$　　②$y = \dfrac{3}{x}$　　③$\dfrac{x}{3} = \dfrac{2}{y}$　　④$xy + 1 = -3$

(2) 次の表で，y が x に反比例するとき，空らんに適する数を入れなさい.

x	1	2	3	4	5	6	$\cdots\cdots$
y	24	12					$\cdots\cdots$

【要点】

反比例　2 つの変数 x，y の間に，

$$y = \frac{a}{x}\ （a \text{ は } 0 \text{ でない定数}）$$

という関係が成り立つとき，『y は x に反比例する』という.

反比例の性質　$y = \dfrac{a}{x}$ のとき，次のことが成り立つ.

・xy は一定で，a に等しい. この a を**比例定数**という.

・x の値が 2 倍，3 倍 $\cdots$ になると，y の値は $\dfrac{1}{2}$ 倍，$\dfrac{1}{3}$ 倍 $\cdots$ になる.

■解答

(1) ① $y = \dfrac{1}{2}x$ より，反比例ではない.（比例である）

② $y = \dfrac{3}{x}$ より，反比例

③ $y = \dfrac{6}{x}$ より，反比例

④ $y = -\dfrac{4}{x}$ より，反比例

以上より，**②, ③, ④**

(2) 表から比例定数を求めると，

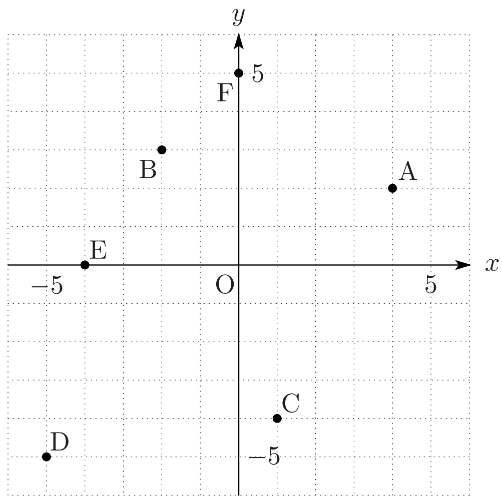
$$a = xy = 24$$

よって，x と y の関係は $y = \dfrac{24}{x}$ だから，

x	1	2	3	4	5	6	$\cdots\cdots$
y	24	12	**8**	**6**	**4.8**	**4**	$\cdots\cdots$

例題 4

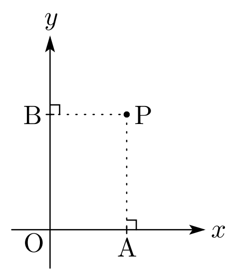
右の図で，点 A，B，C，D，E，F の座標を求めなさい．



【要点】

座標軸

右の図のように 2 つの数直線をそれぞれの原点（数 0 に対応する点）で垂直に交わるようにおいた平面を考える．このとき横の数直線を **x 軸**，たての数直線を **y 軸**といい，あわせて**座標軸**という．座標軸の交点を**原点**といい O で表す．



座標

平面上の点 P から，x 軸，y 軸に垂線 PA，PB を引く．このとき，

点 A に対応する数直線上の数を点 P の **x 座標**

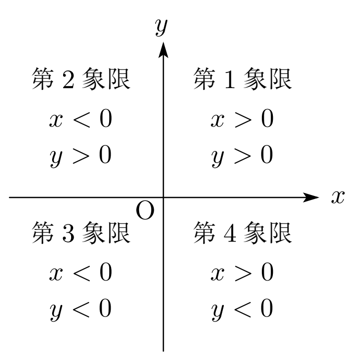
点 B に対応する数直線上の数を点 P の **y 座標**

といい，この 2 つの値をコンマ (,) で区切った上でかっこでくくって組としたものを，点 P の**座標**という．

座標平面

座標軸 (x 軸と y 軸) と原点とが決められた平面．

座標平面は座標軸によって，右の図のように 4 つの象限に分けられる．
（ただし，座標軸は象限に含まれない）



■解答　A(**4, 2**)，B(**−2, 3**)，C(**1, −4**)，D(**−5, −5**)，E(**−4, 0**)，F(**0, 5**)

例題 5

点 $P(-1,\ 2)$ を次のように移動した点の座標を求めなさい.

(1) x 軸について対称移動した点 Q　　(2) 原点について対称移動した点 R

(3) x 軸の正の方向に 3, y 軸の正の方向に 1 だけ平行移動した点 S

(4) 原点を中心に時計回りに 90° 回転移動した点 T

【要点】

点の対称移動

点 $(a,\ b)$ と,

x 軸に関して対称な点の座標は,

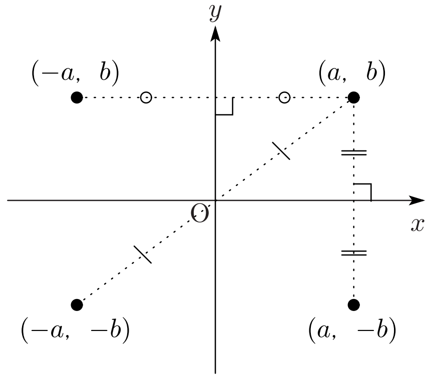
$(a,\ -b)$

y 軸に関して対称な点の座標は,

$(-a,\ b)$

原点に関して対称な点の座標は,

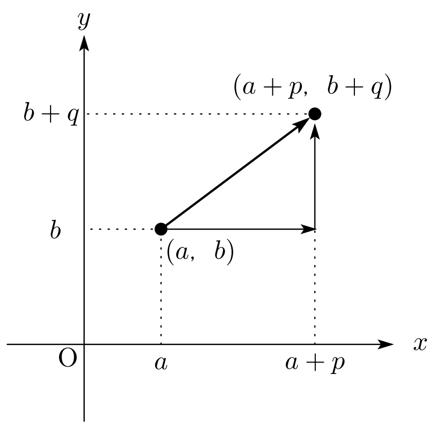
$(-a,\ -b)$



点の平行移動

点 $(a,\ b)$ を, x 軸の正の方向に p, y 軸の正の方向に q だけ平行移動した点の座標は,

$(a+p,\ b+q)$



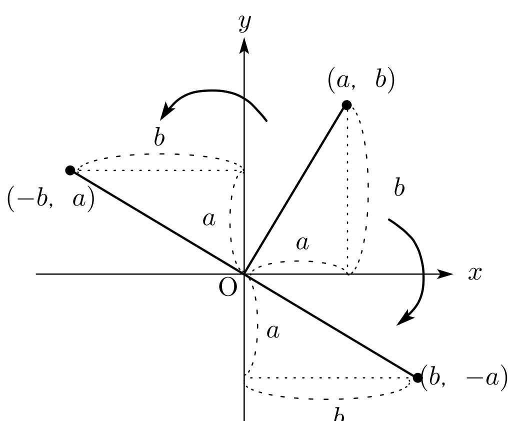
点の回転移動

点 $(a,\ b)$ を, 原点を中心に 90° 回転した点の座標は, 反時計回りに回転すると

$(-b,\ a)$

時計回りに回転すると

$(b,\ -a)$



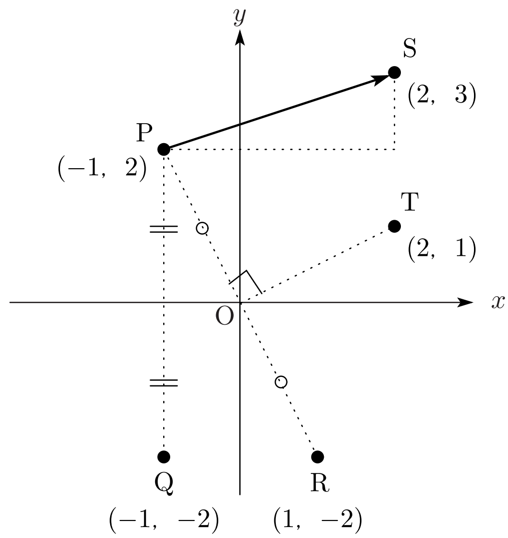
■解答

(1) Q$(\mathbf{-1,\ -2})$

(2) R$(\mathbf{1,\ -2})$

(3) S$(\mathbf{2,\ 3})$

(4) T$(\mathbf{2,\ 1})$



例題 6

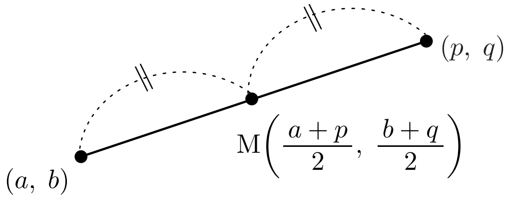
2 点 $\mathrm{A}(-4,\ 3)$, $\mathrm{B}(2,\ -1)$ の中点 M の座標を求めなさい.

【要点】

中点の座標

2 点 $(a,\ b)$, $(p,\ q)$ の中点 M の座標は,

$$\left(\frac{a+p}{2},\ \frac{b+q}{2}\right)$$



■解答

$$\left(\frac{-4+2}{2},\ \frac{3-1}{2}\right) = \boldsymbol{(-1,\ 1)}$$

例題 7

次の関数のグラフをかきなさい.

(1) $y = 2x$　　　　(2) $y = -\dfrac{3}{2}x$

【要点】

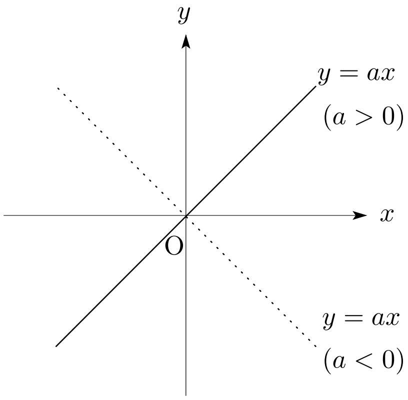
比例のグラフ $y = ax$ には，次の特徴がある.

(1) 原点を通る直線である.

(2) $a > 0$ のとき，グラフは右上がりの直線で，
x が増加すると y も増加する.

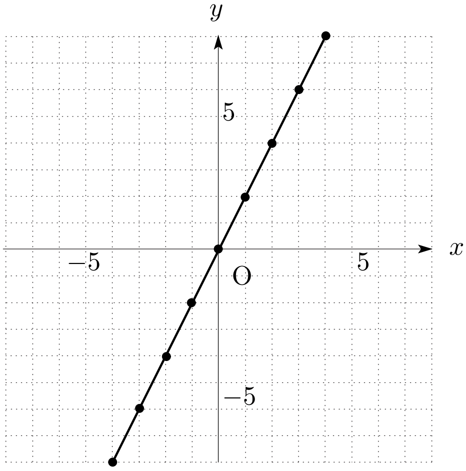
(3) $a < 0$ のとき，グラフは右下がりの直線で，
x が増加すると y は減少する.

(4) グラフ上の原点以外の 1 点がわかれば，
その点と原点を結ぶことで，グラフはかける.

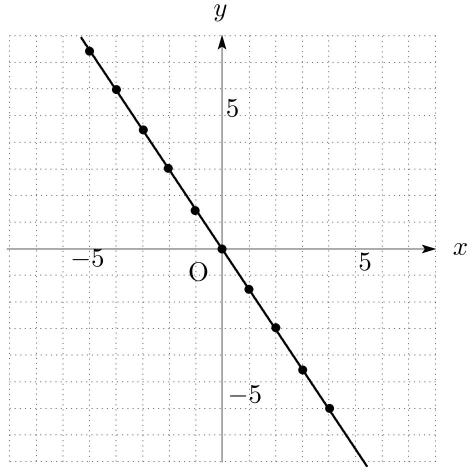


■解答

(1)



(2)



例題 8

次の関数のグラフをかきなさい．

(1) $y = \dfrac{6}{x}$　　　　(2) $y = -\dfrac{8}{x}$

【要点】

反比例のグラフ $\left(y = \dfrac{a}{x}\right)$ には，次の特徴がある．

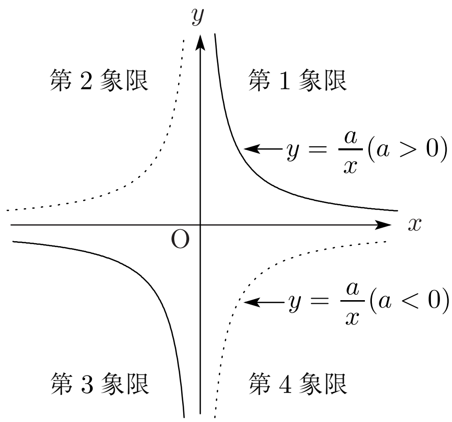
(1) 原点について対称な 2 つの部分からなる曲線である．（**双曲線**という）

(2) $a > 0$ のとき，
グラフは第 1 象限と第 3 象限にある．

(3) $a < 0$ のとき，
グラフは第 2 象限と第 4 象限にある．

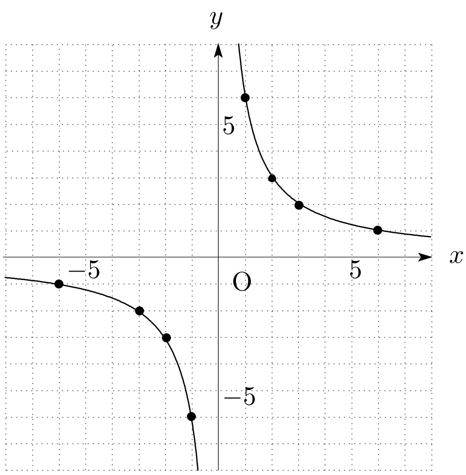
(4) $x = 0$ に対する y の値はない．

(5) x の値の絶対値が大きくなると，y の値は 0 に近づき，
x の値が 0 に近づくと，y の値の絶対値は大きくなる．

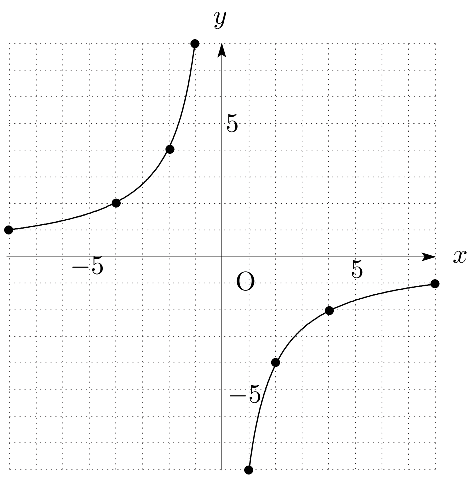


■解答

(1)



(2)



例題 9

次の問いに答えなさい.

(1) x と y の関数 $y=ax$(a は定数) において, $x=-2$ のとき $y=8$ です. 比例定数 a の値を求めなさい.

(2) y が x に比例し, $x=8$ のとき $y=-2$ です. x と y の関係を式で表しなさい.

(3) $y=\dfrac{a}{x}$(a は定数) において, $x=6$ のとき $y=3$ です. 比例定数 a の値を求めなさい.

(4) y が x に反比例し, $x=-12$ のとき $y=-2$ です. y を x の式で表しなさい.

【要点】

y が x に比例し, $x=m$ のとき $y=n$

$\Longleftrightarrow$ 求める式を $y=ax$ とおいた (比例定数を a とおいた) とき, $n=am$ が成り立つ.

y が x に反比例し, $x=m$ のとき $y=n$

$\Longleftrightarrow$ 求める式を $y=\dfrac{a}{x}$ とおいた (比例定数を a とおいた) とき, $n=\dfrac{a}{m}$ が成り立つ.

これを利用して比例定数 a を求め, x と y の関係式を求めることができる.

■解答

(1) $y=ax$ に $x=-2$, $y=8$ を代入して,

$$\begin{aligned} 8 &= a\times(-2) \\ -2a &= 8 \\ \boldsymbol{a} &\boldsymbol{= -4} \end{aligned}$$

(2) 求める式を $y=ax$ $\cdots$① とおく.
$x=8$, $y=-2$ を代入して,

$$\begin{aligned} -2 &= a\times 8 \\ 8a &= -2 \\ a &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

これを ① に代入する.
よって求める式は, $\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{4}x}$

(3) $y=\dfrac{a}{x}$ に $x=6$, $y=3$ を代入して,

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{a}{6} \\ \frac{a}{6} &= 3 \\ \boldsymbol{a} &\boldsymbol{= 18} \end{aligned}$$

(4) 求める式を $y=\dfrac{a}{x}$ $\cdots$① とおく.
$x=-12$, $y=-2$ を代入して,

$$\begin{aligned} -2 &= \frac{a}{-12} \\ -\frac{a}{12} &= -2 \\ a &= 24 \end{aligned}$$

これを ① に代入する.
よって求める式は, $\boldsymbol{y=\dfrac{24}{x}}$

例題 10

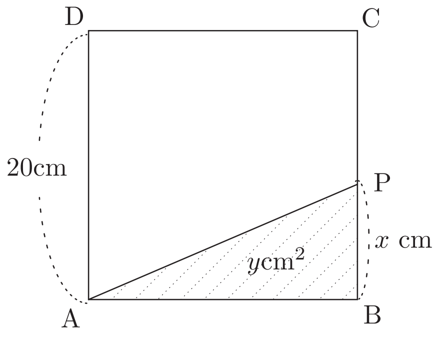
右の図の正方形 ABCD で，点 P は辺 BC を B から C まで動く．

BP を x cm，$\triangle$ ABP の面積を $y\text{cm}^2$ とするとき，次の問いに答えなさい．

(1) y を x の式で表しなさい．

(2) x の変域を求めなさい．

(3) x と y の関係をグラフに表しなさい．



【要点】

・問題をよく読み，何を x，y とするかを理解する．

・x，y の関係から，y を x の式で表す．

・変域がある場合，x の変域を表す（これによって，y の変域も自動的に決まる）．

・**代金**　(代金)=(単価)×(個数)

・**速さ**　(距離)=(速さ)×(時間)

$$(\text{時間})=\frac{(\text{距離})}{(\text{速さ})} \qquad (\text{速さ})=\frac{(\text{距離})}{(\text{時間})}$$

・**歯車**

一定時間内に，2 つの歯車 A，B がかみ合うとき，

(A の歯数)×(A の回転数)=(B の歯数)×(B の回転数)

・**動点**

図形の周囲を点が動くとき，動点の動く辺が決まると，

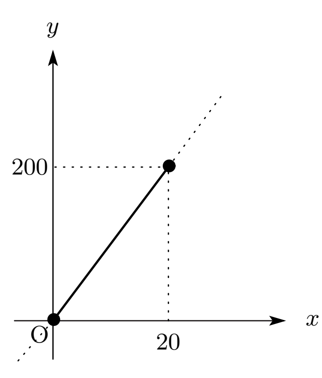
それによって，x と y の関係・変域 が決まる．

■解答

(1) $y=\dfrac{1}{2}\times 20x$ より，$\boldsymbol{y=10x}$

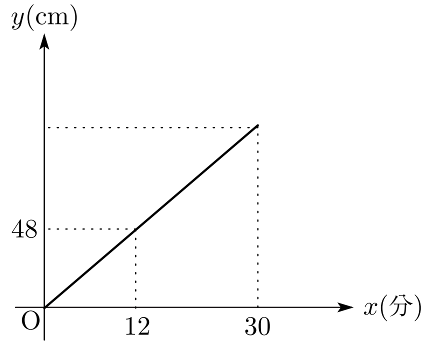
(2) 点 P は BC 上を動くから，x の変域は，$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq 20}$

(3) グラフは右の図の通り．



例題 11

右の図は，底面が長方形で，縦，横の長さがそれぞれ 1 m，0.8 m の直方体の水そうに水を入れるとき，入れ始めてから x 分後の水の深さを $y$cm として，水そうが空の状態から満水になるまでの x と y の関係をグラフに表したものである．次の問いに答えなさい．



(1) 水そうが満水になるのは，水を入れ始めてから何分後ですか.

(2) 満水になるまでに，水の深さは毎分何 cm ずつ増えていますか.

(3) 満水になるまでの間の x と y の関係を式で表しなさい．また，x の変域を求めなさい.

(4) 水は毎分何 L の割合で入ったことになりますか.

(5) この水そうの容積は何 m^3 ですか.

【要点】

グラフの読み取り

1. 与えられている条件とグラフをもとに，x と y の関係を理解する.

グラフが,

① 原点を通る直線 → y は x に比例 → $y = ax$

② 双曲線 → y は x に反比例 → $y = \dfrac{a}{x}$

2. x，y の変域と，それらが表す条件を理解する.

3. グラフ上の点の座標から，比例定数 a の値を求める.

グラフが点 $(p,\ q)$ を通るとき,

①$y = ax$ のグラフ → $a = \dfrac{q}{p}$

②$y = \dfrac{a}{x}$ → $a = pq$

4. 3. で求めた a の値から，変化のようすを理解する.

■解答

(1) グラフの変化する部分が状況の変化を表す.
すなわち，30 分の時点で水そうは満水になったことを表している.
よって，**30 分後**

(2) グラフが点 (12, 48) を通ることから，水を入れ始めてから 12 分後の水の深さが 48cm であることが分かる.
よって，
$$48 \div 12 = 4 \quad \textbf{毎分 4cm}$$

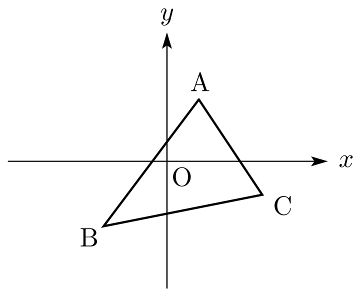
(3) (2) より，水の深さは毎分 4cm ずつ増えるから，
$$\boldsymbol{y = 4x}$$
x の変域は，$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq 30}$

(4) (2) より，1 分間に入る水は，
$$100 \times 80 \times 4 = 32000(\mathrm{cm}^3)$$
すなわち，**毎分 32L**

(5) (3) より，$y = 4x$ に $x = 30$ を代入して，
$$y = 120(\mathrm{cm})$$
この水そうの深さは 1.2 mだから，容積は，
$$1 \times 0.8 \times 1.2 = \mathbf{0.96(m^3)}$$

例題 12

右の図のように，点 A(1, 2)，B(−2, −2)，C(3, −1) がある．次の問いに答えなさい．



(1) △ABC の面積を求めなさい．

(2) 3 点 A，B，C のほかに，もう 1 つの点を頂点とするような平行四辺形はいくつできますか．

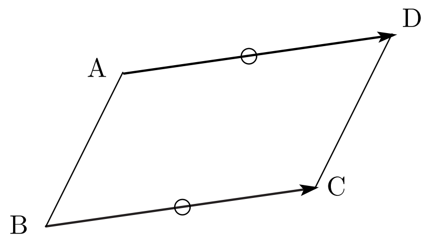
(3) AB//DC，BC//AD となるように点 D をとって平行四辺形をつくるとき，点 D の座標を求めなさい．

【要点】

平行四辺形の頂点の座標

平行四辺形 ABCD において，AD//BC，AD=BC が成り立つ．

よって，頂点 D，C はそれぞれ頂点 A，B を AD の長さ分だけ平行移動したものと考えられる．



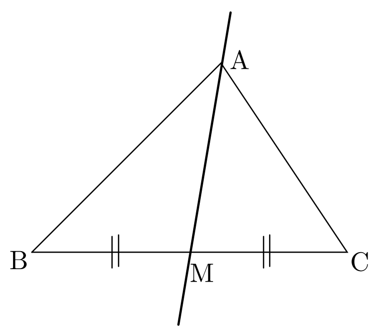
このことから，座標平面上の平行四辺形について，3 つの頂点の座標がわかれば，残りの頂点の座標を求めることができる．

三角形の面積の二等分

三角形の 1 つの頂点と対辺の中点を結ぶ直線は，その三角形の面積を二等分する．

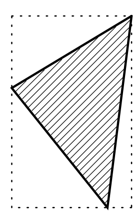
＜例＞右の図で，

$$\mathrm{BM}=\mathrm{CM} \Longleftrightarrow \triangle \mathrm{ABM}=\triangle \mathrm{ACM}$$



多角形の面積

多角形を囲む長方形をつくり，この面積から余分な三角形の面積を引いて求める．



■解答

(1) 左の図のように, 点 P$(-2,\ 2)$, Q$(3,\ 2)$, R$(3,\ -2)$ をとり, 長方形 PBRQ をつくる.

このとき,

PQ=5, PB=4 より,

長方形 PBRQ$= 5 \times 4 = 20$

AQ=2, QC=3 より,

$\triangle$ AQC$= \dfrac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$

CR=1, BR=5 より,

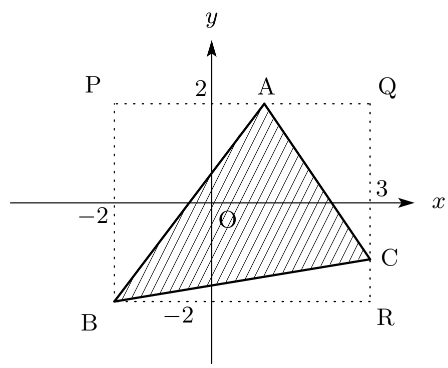
$\triangle$ CRB$= \dfrac{1}{2} \times 1 \times 5 = \dfrac{5}{2}$

AP=3, PB=4 より,

$\triangle$ APB$= \dfrac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$

よって,

$\triangle$ ABC$= 20 - \left(3 + \dfrac{5}{2} + 6\right) = \boldsymbol{\dfrac{17}{2}}$



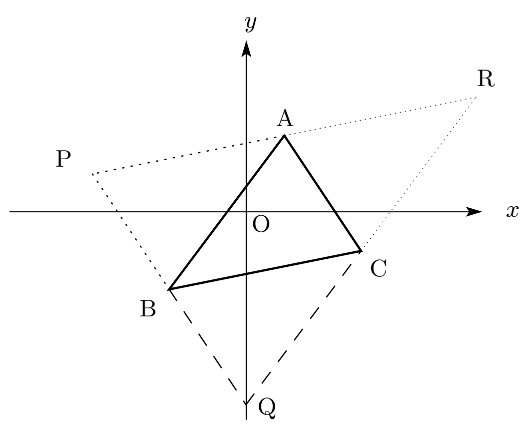
(2) 右の図のように,

① 辺 AB を対角線とする場合
(平行四辺形 APBC)

② 辺 BC を対角線とする場合
(平行四辺形 ABQC)

③ 辺 AC を対角線とする場合
(平行四辺形 ABCR)

の **3 つ**ができる.



(3) 点 C は, 点 B を x 軸の正の方向に 5, y 軸の正の方向に 1 だけ平行移動した点であると考えられるから, 点 D も点 A を同様に平行移動した点であると考えられる.

よって, D の座標は,

$(1+5,\ 2+1) = \boldsymbol{(6,\ 3)}$