1章　平方根

要点

例題 1

次の問いに答えなさい．

(1) 次の式を計算しなさい．

$$(\sqrt{2}+1)^2-(\sqrt{2}-1)^2$$

(2) 次の数の分母を有理化しなさい．

① $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$　　　② $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

■考え方　平方根と平方根の計算

▼平方根

2 乗すると a になる数を **a の平方根**という（ただし，$a \geqq 0$）．
a の平方根は普通，正であるものと負であるものの 2 つあり，その 2 つの絶対値は等しい．

＜例＞　2 乗して 4 になる数　$+2$ と -2

ただし，$a=0$ のときは，平方根は 1 つしかない．つまり，0 の平方根は 0 だけ．

$a<0$ のとき，2 乗してマイナスになる数はないので，a の平方根はない．

＜注＞　(正の数)^2 = (正の数) × (正の数) = (正の数)

(負の数)^2 = (負の数) × (負の数) = (正の数)

$0^2=0$

となるので，2 乗してマイナスになる数はない．

▼根号

a の平方根のうち，正のほうを $\boldsymbol{\sqrt{a}}$ と表し，**ルート a** と読む．$\sqrt{\ \ }$ はルートまたは**根号**と呼ばれる記号である．平方根のうち，負のほうは根号を用いて $-\sqrt{a}$ と表される．

＜例＞　$\sqrt{4}=2$

4 の平方根は $\sqrt{4}$ と $-\sqrt{4}$（つまり，2 と -2）

この根号を用いると，5 の平方根のような整数または分数で表すことができない数も $\sqrt{5}$，$-\sqrt{5}$ と表すことができる．

▼複号

2 と -2，$\sqrt{5}$ と $-\sqrt{5}$ のように，絶対値が同じであるが符号のみが違う 2 つの数を一度に ± 2，$\pm\sqrt{5}$ のように表す．この記号 $\pm$ を**複号**という．

＜注＞ 複号 ($\pm$) について，複号の上に書いてあるものどうし，下に書いてあるものどうしを組み合わせて考えて欲しいときは，式の最後に**複号同順**と書く．

▼ $\boldsymbol{a\sqrt{b}}$ の形

$a \times \sqrt{b}$ のことを $a\sqrt{b}$ とかく．

▼平方根の性質

a の平方根 $\pm\sqrt{a}$ とは，2 乗すると a になる数のことであった（ただし $a \geqq 0$）．この定義から次の式が必ず成立する．

$$a \geqq 0 \text{ のとき，} \begin{cases} \boldsymbol{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a} \\ \boldsymbol{\sqrt{a^2} = a} \\ \boldsymbol{\sqrt{(-a)^2} = a} \end{cases}$$

＜確認＞

$\sqrt{\quad}$ は 2 つの平方根のうち正の値 または 0 を表す記号だったので，必ず正 または 0．したがって，$a \geqq 0$ のとき，

$\sqrt{a^2} = |a| = a$，$\sqrt{(-a)^2} = |-a| = a$

となる．

▼根号の外にある数を根号の中に入れる

$a > 0$ のとき，$\sqrt{a^2} = a$ より，$a = \sqrt{a^2}$．よって，次の式が成り立つ (a，b は正)．

$\boldsymbol{a\sqrt{b}} = \sqrt{a^2}\sqrt{b} = \boldsymbol{\sqrt{a^2b}}$

▼根号の中にある平方数を根号の外に出す

根号の中の数が平方数と他の数の積で表されるとき，根号の中の数を小さくすることができる．この作業を**根号の簡約化**という．ルートを含む計算では，根号の簡約化により根号の中の値をなるべく小さくして計算することが，計算を上手に行うための大きなポイントになる．

$\boldsymbol{\sqrt{a^2b}} = \sqrt{a^2}\sqrt{b} = \boldsymbol{a\sqrt{b}}$　(a，b は正)

＜例＞

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{18}$$
$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$$
$$\sqrt{200} = \sqrt{10^2 \times 2} = 10\sqrt{2}$$

（簡約化を行った場合）$\sqrt{48} \times \sqrt{98} = 4\sqrt{3} \times 7\sqrt{2} = 4 \times 7 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} = 28\sqrt{6}$

（簡約化を行わない場合）$\sqrt{48} \times \sqrt{98} = \sqrt{48 \times 98} = \sqrt{4704} = \ldots$

▼平方根の乗法・除法

$a>0,\ b>0$ のとき，次の式が成り立つ．

$$\boldsymbol{\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}}$$

$$\boldsymbol{\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

<例> $\begin{cases}\sqrt{4}\times\sqrt{9}=2\times3=6\\ \sqrt{4\times9}=\sqrt{36}=6\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{9}}=\dfrac{12}{3}=4\\ \sqrt{\dfrac{144}{9}}=\sqrt{16}=4\end{cases}$

▼平方根の加法・減法

根号の簡約化の後 $\begin{cases}\text{根号の中が同じ数のとき}\\ \qquad\to \boldsymbol{m\sqrt{a}\pm n\sqrt{a}=(m\pm n)\sqrt{a}}\quad\text{（複号同順）}\\ \text{根号の中が違う数のとき}\\ \qquad\to \text{それ以上簡単にならない}\end{cases}$

▼乗法公式・因数分解の利用

乗法公式の形を含む計算や因数分解の利用もよく現れる．乗法公式・因数分解の公式を確認しておこう．

▼平方の公式

$$\boldsymbol{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

$$\boldsymbol{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

▼和と差の積の公式

$$\boldsymbol{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

▼ 1 次式の積の公式

$$\boldsymbol{(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab}$$

▼分母の有理化

分数の分母に根号があるとき，分母に根号がない形に変形することを**分母の有理化**という．そのためには，分母にある平方根を，分母と分子にそれぞれかければよい．

＜例＞ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$ ［$2\sqrt{3}$ を分母分子にかける必要はない］

根号の有理化によって，一見異なるように見える根号どうしが，実は同じ値であることがわかることがある．根号を含んだ式の計算で見通しをつけるために，分母の有理化も原則として行うようにする．

$a>0,\ b>0$ のとき，

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\times\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\times\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}}$$

▼分母が和や差の形で表されているときの有理化

$a>0,\ b>0,\ a\neq b$ のとき，

$$\boldsymbol{\begin{aligned}\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}&=\frac{c\times(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\times(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\\&=\frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}\end{aligned}}$$

$$\boldsymbol{\begin{aligned}\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}&=\frac{c\times(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\times(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\\&=\frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}\end{aligned}}$$

■解答

(1)
$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+1)^2-(\sqrt{2}-1)^2&=\{(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)\}\{(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)\}\\&=2\sqrt{2}\times 2\\&=\boldsymbol{4\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(2) ①
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}+1}&=\frac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\\&=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}\\&=\boldsymbol{\sqrt{2}-1}\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}} &= \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\{(2+\sqrt{2})+\sqrt{6}\}\{(2+\sqrt{2})-\sqrt{6}\}} \\ &= \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{(2+\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2} \\ &= \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4+4\sqrt{2}+2-6} \\ &= \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{(2+\sqrt{2}-\sqrt{6})\times\sqrt{2}}{4\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}+2-2\sqrt{3}}{4\times 2} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{3}}{4}}\end{aligned}$$

例題 2

次の問いに答えなさい.

(1) $a>0$, $b>0$ のとき, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ を展開することにより, 次の式が成り立つことを示しなさい.

$$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

$$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b} \quad (\text{ただし, } a>b)$$

(2) 次の二重根号をはずしなさい.

① $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ② $\sqrt{11-\sqrt{96}}$

■考え方　二重根号

▼二重根号

根号の中にさらに根号が入ったものを**二重根号**という.

一般に二重根号は簡単にはならないが,

$$\sqrt{A\pm 2\sqrt{B}}$$

という形に変形できて, さらに $A=a+b$, $B=ab$ という 2 つの正の数 a, b がある場合は,

$$\begin{aligned}\sqrt{A\pm 2\sqrt{B}} &= \sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}} \\ &= \sqrt{a}\pm\sqrt{b} \quad (\text{ただし, } a>b)\text{(複号同順)}\end{aligned}$$

のように簡単になる. この操作を**二重根号をはずす**という.

■解答

(1)
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$$
$$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\quad(\because\ \ \sqrt{a}>0,\ \sqrt{b}>0 \text{ より} \sqrt{a}+\sqrt{b}>0)$$
$$\therefore\ \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

同様に,
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2=a+b-2\sqrt{ab}$$
$$\therefore\ \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}\quad(a>b \text{ より} \sqrt{a}-\sqrt{b}>0)$$

(2) ①
$$\begin{aligned}\sqrt{3+2\sqrt{2}}&=\sqrt{(1+2)+2\sqrt{1\times 2}}\\&=\sqrt{1}+\sqrt{2}\\&=\mathbf{1+\sqrt{2}}\end{aligned}$$

②
$$\begin{aligned}\sqrt{11-\sqrt{96}}&=\sqrt{11-2\sqrt{24}}\quad[\text{根号の中の根号の前に 2 が必要}]\\&=\sqrt{(8+3)-2\sqrt{8\times 3}}\\&=\sqrt{8}-\sqrt{3}\\&=\mathbf{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}\end{aligned}$$

◆ここに注意◆

$\sqrt{11-\sqrt{96}}=\sqrt{3}-\sqrt{8}$ としてはならない. $\sqrt{11-\sqrt{96}}$ は正の値を表すからである.

例題 3

次の問いに答えなさい.

(1) $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $y=\sqrt{2}-\sqrt{3}$ のとき, $x+y$, xy, $x^2+2xy+y^2$, $x^2+3xy+y^2$ の値を求めなさい.

(2) $x=\sqrt{5}+3$ のとき, x^2-6x+9 の値を求めなさい.

(3) $x=\sqrt{5}+3$ のとき, $x^2-6x+10$ の値を求めなさい.

■考え方　根号を含む式の計算の工夫

▼対称式の式の値

x と y の値を入れ替えても式の値が変わらない式のことを**対称式**という. 対称式の値を求める際には, x と y の和と積 ($x+y$ と xy) の値を先に求めておき, 求める式の値をこの $x+y$ と xy で表すようにすると, 計算が楽になることが多い. このときには, 乗法公式や因数分解の公式をうまく活用して, これらの公式を変形した形を利用する.

<例>　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

(平方の公式 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ を変形した, $(x+y)^2-2xy=x^2+y^2$ を利用している.)

▼多項式の式の値

多項式に根号を含む値を代入するとき，根号の計算が大変になることがある．これは主として，根号を含む式を 2 乗，3 乗とするときに，根号を含む部分と根号を含まない部分とが入り交じるためである．そこで，根号の計算をしなくてすむように，あらかじめ与えられた文字式を変形し，根号を 2 乗してなくしてしまう変形をすることがある．この方法はより複雑な式に根号を含む値を代入するときに用いられる方法である．

＜例＞　$x=5+\sqrt{2}$ のとき，$x-5=\sqrt{2}$ より，$(x-5)^2=2$．さらにこの式を変形すると，
$x^2-10x+25=2$

$$\therefore x=5+\sqrt{2}\text{のとき，}x^2-10x+23=0$$

＜注＞ $x=5+\sqrt{2}$ をそのまま 2 乗したのでは，$x^2=25+10\sqrt{2}+2=27+10\sqrt{2}$ となって，根号が残ってしまう．これを避けるために，5 を移項して右辺を $\sqrt{2}$ だけにしてから 2 乗している．

【要点】

多項式の式の値　根号だけを 2 乗する形に変形して，根号を消す

対称式の式の値　$x+y$，xy を用いて求める式を表す

■解答

(1)
$$x+y=(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})=\mathbf{2\sqrt{2}}$$
$$xy=(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})=2-3=\mathbf{-1}$$
$$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2=(2\sqrt{2})^2=\mathbf{8}$$
$$x^2+3xy+y^2=x^2+2xy+y^2+xy=(x+y)^2+xy=(2\sqrt{2})^2+(-1)=\mathbf{7}$$

(2) $x=\sqrt{5}+3$ より，$x-3=\sqrt{5}$
この式の両辺を 2 乗して，
$$(x-3)^2=5$$
$$\therefore x^2-6x+9=\mathbf{5}$$
これが求める式の値である．

(3) (2) と同様にして，$x^2-6x+9=5$
この式の左辺に 1 を加えたものが求める値であるから，
$$x^2-6x+10=x^2-6x+9+1=5+1=\mathbf{6}$$

例題 4

次の問いに答えなさい.

(1) 次の数を小さい順に並べなさい.

$\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, 3

(2) $5-\sqrt{6}$ と $\sqrt{6}$ の大小を調べなさい.

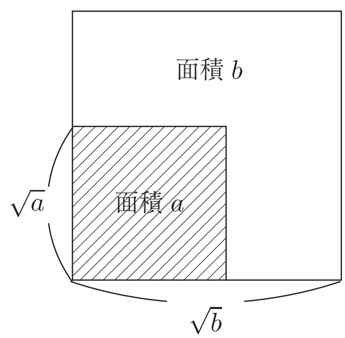
(3) $10-4\sqrt{3}$ と 3 との大小を調べなさい.

(4) $\sqrt{7}+2\sqrt{2}$ と $\sqrt{6}+3$ の大小を調べなさい.

■考え方

▼平方根の大小

$\sqrt{a}$ は a の値が平方数または平方数を含む商の形でないときは，具体的な数値がとらえにくい．そこで，$\sqrt{a}$ の値の大小が a の大小と一致することを利用する．



正方形において，1 辺の長さが大きいと面積も大きく，逆に，面積が大きいと 1 辺の長さも大きい．

面積が $a(>0)$ である正方形の 1 辺の長さは $\sqrt{a}$ であるから，次のことがいえる．

$a>0$, $b>0$ のとき，$\sqrt{a}<\sqrt{b}$ ならば，$a<b$ である．

また，逆に，

$a>0$, $b>0$ のとき，$a<b$ ならば，$\sqrt{a}<\sqrt{b}$ である．

これは，2 乗した値どうしで比べていることを意味する．

$$\boxed{a>0,\ b>0 \text{ のとき，} \sqrt{a}<\sqrt{b} \iff a<b}$$

＜注＞「p ならば q」も「q ならば p」も成り立つとき，

$p \iff q$

と表す．

▼大小の比較

2 つの数の大小の比較では，次の原理が使われる．

$$\boxed{a>b \iff a-b>0 \qquad a<b \iff a-b<0}$$

つまり 2 つの数 a，b の大小を比べたいときは 2 つの数の差をとって，それが 0 より大きいか，小さいかを調べればよい．

もちろん平方根を含む数どうしの比較の場合は，根号のついた数どうしの引き算をしても計算は進まないので，上でみた「**2 乗した数で比べる**」という方法を組み合わせることになる．

■解答

(1) $(\sqrt{7})^2 = 7$，$(\sqrt{10})^2 = 10$，$3^2 = 9$

$7 < 9 < 10$ より，

$\boldsymbol{\sqrt{7} < 3 < \sqrt{10}}$

(2) $5 - \sqrt{6}$ と $\sqrt{6}$ の差をとってみると，

$$\begin{aligned}(5-\sqrt{6}) - \sqrt{6} &= 5 - 2\sqrt{6} \\ &= \sqrt{25} - \sqrt{24} > 0\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{5 - \sqrt{6} > \sqrt{6}}$

(3) $(10 - 4\sqrt{3}) - 3 = 7 - 4\sqrt{3}$ より，$7 - 4\sqrt{3}$ の正負を調べればよい．

これには 7 と $4\sqrt{3}$ の大小を調べればよい．

$$7^2 = 49 \quad , \quad (4\sqrt{3})^2 = 48$$

したがって，$7 > 4\sqrt{3}$　　$\therefore 7 - 4\sqrt{3} > 0$

以上より，

$$(10 - 4\sqrt{3}) - 3 > 0$$

$$\therefore \boldsymbol{10 - 4\sqrt{3} > 3}$$

(4) $(\sqrt{7} + 2\sqrt{2})^2 = 7 + 4\sqrt{14} + 8 = 15 + 4\sqrt{14}$

$(\sqrt{6} + 3)^2 = 6 + 6\sqrt{6} + 9 = 15 + 6\sqrt{6}$

よって $7 + 2\sqrt{2}$ と $\sqrt{6} + 3$ の大小は，$15 + 4\sqrt{14}$ と $15 + 6\sqrt{6}$ の大小を比べればよい．

$$(15 + 4\sqrt{14}) - (15 + 6\sqrt{6}) = 4\sqrt{14} - 6\sqrt{6} = 2(2\sqrt{14} - 3\sqrt{6})$$

よって $2\sqrt{14}$ と $3\sqrt{6}$ の大小を比べればよい．

$$(2\sqrt{14})^2 = 56 \quad , \quad (3\sqrt{6})^2 = 54$$

したがって，$2\sqrt{14} > 3\sqrt{6}$　　$\therefore 2\sqrt{14} - 3\sqrt{6} > 0$

以上より，

$$15 + 4\sqrt{14} > 15 + 6\sqrt{6}$$

$$(\sqrt{7} + 2\sqrt{2})^2 > (\sqrt{6} + 3)^2$$

$$\therefore \boldsymbol{\sqrt{7} + 2\sqrt{2} > \sqrt{6} + 3}$$

例題 5

次の問いに答えなさい．

(1) $\sqrt{5}$ の小数部分を a とするとき，a^2+4a+3 の値を求めなさい．

(2) $2\sqrt{2}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$ab+2b^2$ の値を求めなさい．

(3) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$\dfrac{2}{a+b}+a-b$ の値を求めなさい．

■考え方　整数部分と小数部分

根号を含む数は一般に無理数のため，その中に整数部分と小数部分を含む．

$$\sqrt{2} = \underbrace{1}_{\text{整数部分}}.\underbrace{41421356\cdots\cdots}_{\text{小数部分}}$$

根号を含む数の**整数部分**は，**その数をはさむ差が 1 の整数の組**を見つければよい．このとき，根号の中が平方数の場合，その数は整数となることを利用する．

つまり，$0<a<\sqrt{b}<a+1 \iff \sqrt{a^2}<\sqrt{b}<\sqrt{(a+1)^2}$

＜例＞　$1=\sqrt{1^2}=\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$

よって，$\sqrt{2}$ は 1 より大きく，2 より小さい．　　　よって，その整数部分は 1.

◆ここに注意◆

この方法を用いるためには，根号の中の数をはさむ**平方数**を見つける必要がある．したがって，平方数とそのもとの数の組を頭に入れておく必要がある．

■確認 平方数

もとの数 a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
平方数 a^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196

整数部分がわかれば，**もとの数からその整数部分を引いた数**が**小数部分**になる．

すなわち，ある数 x の整数部分が a，小数部分が b のとき，$x=a+b$ が成り立つから，$b=x-a$

＜例＞　$\sqrt{2}$ の整数部分が 1 なので，$\sqrt{2}$ の小数部分は $\sqrt{2}-1$

（これは実際には

$$\sqrt{2}-1=1.4142135623730950488\cdots-1=0.4142135623730950488\cdots$$

ということを行っている）

【要点】

整数部分と小数部分

整数部分　その数をはさむ差が 1 の整数の組を見つける

小数部分　もとの数からその整数部分を引いた数

■解答

(1) $2 < \sqrt{5} < 3$ より，$\sqrt{5}$ の整数部分は 2

ゆえに，小数部分 a は，$a = \sqrt{5} - 2$

よって，

$$\begin{aligned} a^2 + 4a + 3 &= (\sqrt{5} - 2)^2 + 4(\sqrt{5} - 2) + 3 \\ &= 5 - 4\sqrt{5} + 4 + 4\sqrt{5} - 8 + 3 \\ &= \mathbf{4} \end{aligned}$$

＜別解１＞

$$\begin{aligned} a^2 + 4a + 3 &= (a + 3)(a + 1) \\ &= (\sqrt{5} - 2 + 3)(\sqrt{5} - 2 + 1) \\ &= (\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1) \\ &= 5 - 1 = \mathbf{4} \end{aligned}$$

＜別解２＞

$a = \sqrt{5} - 2$　より，$a + 2 = \sqrt{5}$

両辺を 2 乗して，$(a + 2)^2 = (\sqrt{5})^2$

よって，　$a^2 + 4a + 4 = 5$

$a^2 + 4a + 3 = 5 - 1 = \mathbf{4}$

(2) $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$ より，$2 < \sqrt{8} < 3$ だから，

$2\sqrt{2}$ の整数部分 a は，$a = 2$

よって，小数部分 b は，$b = 2\sqrt{2} - 2$

ゆえに，

$$\begin{aligned} ab + 2b^2 &= b(a + 2b) \\ &= (2\sqrt{2} - 2)\{2 + 2(2\sqrt{2} - 2)\} \\ &= (2\sqrt{2} - 2)(2 + 4\sqrt{2} - 4) \\ &= (2\sqrt{2} - 2)(4\sqrt{2} - 2) \\ &= 16 - 4\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 4 \\ &= \mathbf{20 - 12\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(3) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 = 5+2\sqrt{15}+3 = 8+2\sqrt{15} = 8+\sqrt{60}$

$7 < \sqrt{60} < 8$ より，

$$\begin{array}{rcccc} & 15 < & 8+\sqrt{60} & < & 16 \\ & 15 < & (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 & < & 16 \\ (3<) & \sqrt{15} < & \sqrt{5}+\sqrt{3} & < & 4 \end{array}$$

$\sqrt{5}+\sqrt{3}$ の整数部分 a は，$a=3$

よって，小数部分 b は，$b=\sqrt{5}+\sqrt{3}-3$

$$\begin{aligned} \frac{2}{a+b}+a-b &= \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+3-(\sqrt{5}+\sqrt{3}-3) \\ &= \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}+6-\sqrt{5}-\sqrt{3} \\ &= \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3}+6-\sqrt{5}-\sqrt{3} \\ &= \sqrt{5}-\sqrt{3}+6-\sqrt{5}-\sqrt{3} \\ &= \mathbf{6-2\sqrt{3}} \end{aligned}$$