

物 理

第 1 問 水平な床面上にとった x 軸に沿って動く台車の上の物体の運動について以下の設問 I, II に答えよ。

I 図 1—1 に示すように、台車の上にはばね定数 k を持ち質量の無視できるばねを介して質量 m の物体が取り付けられており、物体は台車上を滑らかに動く。台車に固定された座標軸 y を、ばねの自然長の位置を原点として、 x 軸と同じ向きにとる。ばねは y 軸方向にのみ伸び縮みし、ばねと台車は十分長い。台車は x 軸方向に任意の加速度 a で強制的に運動させることができる。 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ として以下の設問に答えよ。

(1) 台車が $x = 0$ 、物体が $y = 0$ で静止している状態から、台車を表 1—1 に示す加速度で強制的に運動させる。加速度の大きさ a_1 は定数である。時刻 $t = t_1$ における台車の速度、および時刻 $t = 0$ から $t = t_1 + t_2$ までの間に台車が移動する距離を求めよ。

表 1—1

	時刻 t	台車の加速度 a
加速区間	$0 \sim t_1$	a_1
等速区間	$t_1 \sim t_2$	0
減速区間	$t_2 \sim (t_1 + t_2)$	$-a_1$

(2) 物体が $y = 0$ で静止している状態から、表 1—1 で $t_1 = \frac{T}{2}$ 、 $t_2 = nT$ (n は自然数) として台車を動かす。時刻 $t = t_1 + t_2$ における物体の y 座標および台車に対する相対速度を求めよ。

- (3) 次に台車をとめた状態で物体を $y = y_0 (< 0)$ にいったん固定したのち、
 $t = 0$ で物体を静かに放し、表 1—2 に示す加速度で台車を強制的に運動させる。

表 1—2

	時刻 t	台車の加速度 a
加速区間	$0 \sim \frac{T}{2}$	a_2
減速区間	$\frac{T}{2} \sim T$	$-a_2$

加速度の大きさ a_2 がある定数のとき、時刻 $t = T$ において物体の y 座標は $y = 0$ となり、台車に対する物体の相対速度も 0 となる。 a_2 の値および $t = \frac{T}{2}$ における物体の y 座標を求めよ。

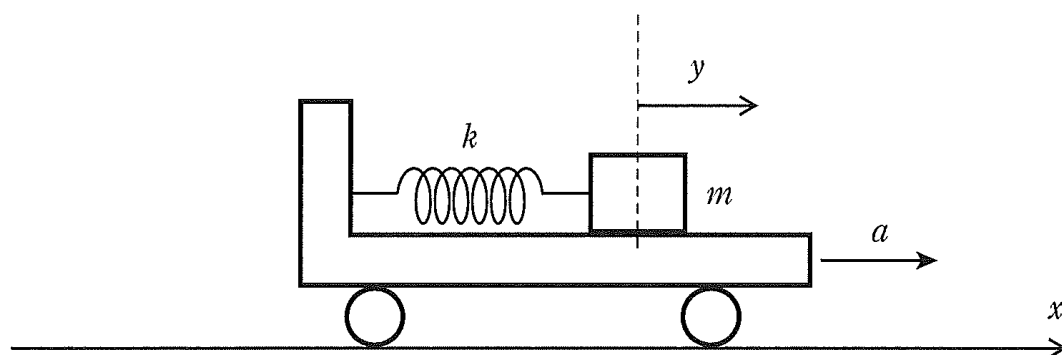


図 1—1

Ⅱ 手のひらの上に棒を立て、棒が倒れないように手を動かす遊びがある。このしぐみを図 1—2 に示す倒立振子で考える。倒立振子は質量の無視できる変形しない長さ ℓ の細い棒の先端に質量 m の質点を取り付けたものとし、台車上の点 O を支点として x 軸を含む鉛直平面内で滑らかに動くことができる。倒立振子の傾きは鉛直上向きから図 1—2 の時計回りの角度 θ (ラジアン) で表す。 θ の大きさは十分に小さく、 $\sin \theta \doteq \theta$, $\cos \theta \doteq 1$ の近似が成り立つ。台車は倒立振子の運動の影響を受けることなく任意の加速度 a で強制的に動かせるものとする。重力加速度の大きさを g , $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ として以下の設問に答えよ。

- (1) 台車が加速度 a で加速しているとき、台車上で見ると、 θ だけ傾いた倒立振子の先端の質点には、図 1—2 に示すように重力 mg と慣性力 ($-ma$) が作用している。質点に働く力の棒に垂直な成分 f を θ , a , m , g を用いて表せ。ただし f の正の向きは θ が増える向きと同じとする。

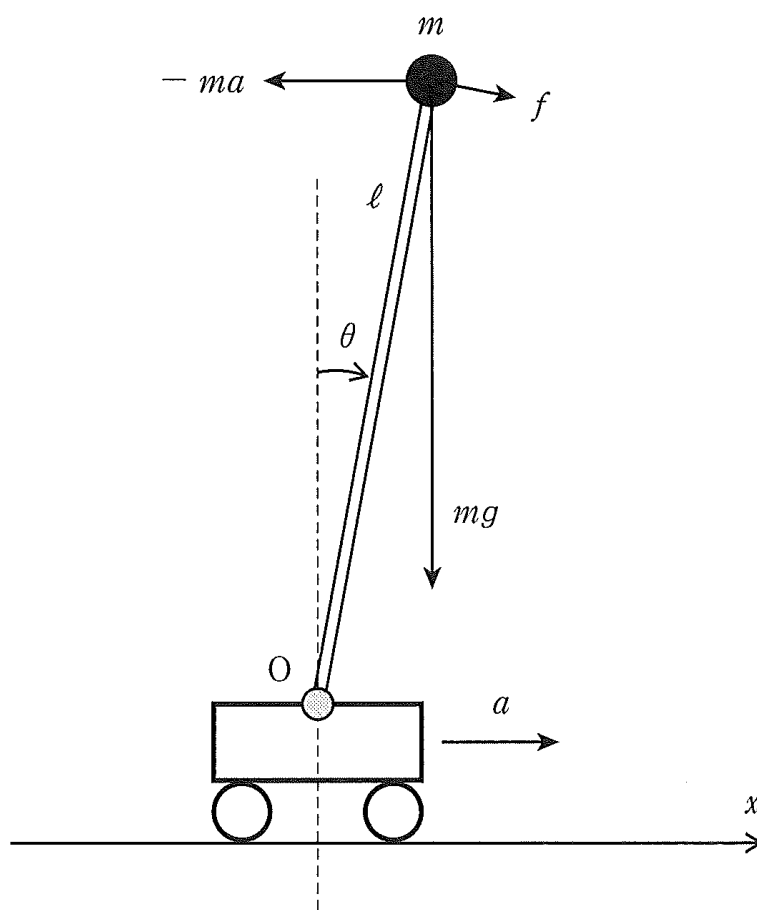


图 1—2

(2) 時刻 $t = 0$ で台車は静止しており，倒立振子を θ_0 傾けて静止させた状態から始まる運動を考える。時刻 $t = T$ で台車が静止し，かつ倒立振子が $\theta = 0$ で静止するようにしたい。そのために倒立振子を図 1—3 に示すように運動させる。すなわち単振動の半周期分の運動で θ_0 から 0 を通過して $t = \frac{T}{2}$ で θ_1 に至り，続いて θ_1 から振幅の異なる単振動の半周期分の運動ののち， $t = T$ において $\theta = 0$ に戻り静止する。このような運動となるように加速度 a を変化させる。

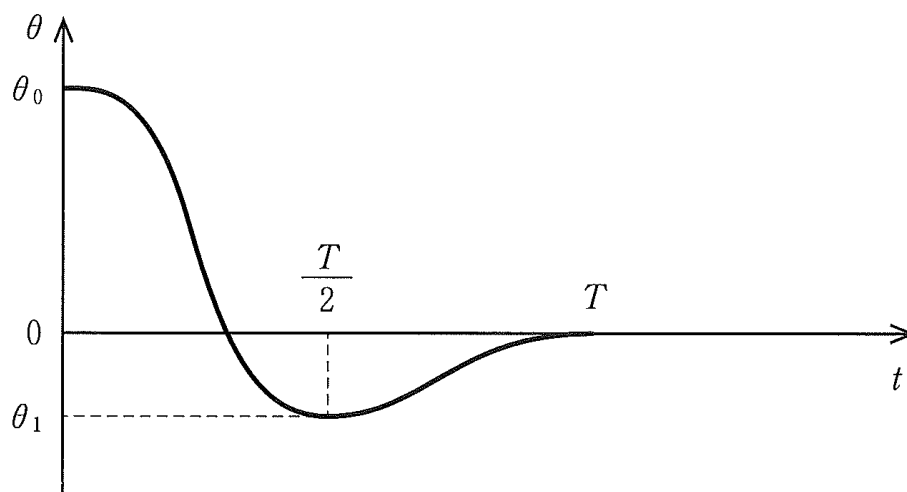


図 1—3

以下の式中の空欄 から に当てはまる式を選択肢①から⑰の中から選べ。選択肢は繰り返し使って良い。また空欄 から に当てはまる数式を書け。

時刻 $t = 0$ から $t = \frac{T}{2}$ の間の θ は

$$\theta = \text{ア} \cos \sqrt{\frac{g}{\ell}} t + \text{イ}$$

と表される。このように単振動する質点に働く復元力 F は

$$F = \text{ウ} (\theta - \text{イ})$$

である。この運動を実現するためには設問Ⅱ(1)で求めた f が F と等しければよいので加速度 a は次の式となる。

$$a = \left(\text{エ} \cos \sqrt{\frac{g}{\ell}} t + \text{オ} \right) g$$

この式の第1項が単振動の加速度と同じ形であることを考慮すると、時刻 $t = 0$ から $t = \frac{T}{2}$ の台車の速度の変化 v_1 は θ_0 , θ_1 , g , ℓ を用いて

$$v_1 = \text{i}$$

となる。

時刻 $t = \frac{T}{2}$ から $t = T$ の運動についても単振動の半周期分であるので同様に考えれば、この区間の台車の速度の変化 v_2 は θ_1 , g , ℓ を用いて

$$v_2 = \text{ii}$$

となる。よって

$$\theta_1 = \text{iii} \theta_0$$

を得る。

- | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|---------------------------|---------------------------|
| ① $\frac{\theta_0 + \theta_1}{2}$ | ② $\frac{\theta_0 - \theta_1}{2}$ | ③ $(\theta_0 + \theta_1)$ | ④ $(\theta_0 - \theta_1)$ |
| ⑤ θ_0 | ⑥ θ_1 | ⑦ 0 | ⑧ π |
| ⑨ $-ma$ | ⑩ $-mg$ | ⑪ $-m(g + a)$ | ⑫ $-\frac{ma}{\ell}$ |
| ⑬ $-\frac{mg}{\ell}$ | ⑭ $-\frac{m(g + a)}{\ell}$ | ⑮ $-a\ell$ | ⑯ $-g\ell$ |
| ⑰ $-(g + a)\ell$ | | | |