(1) 2 8/8

(2) 3 7/17

$f(x)=x^2+2x+a$ について，次の各問いに答えよ。 (25 点)

(1) 方程式 $f(x)=0$ が $-1<x<1$ の範囲に実数解をもつとき，$a$ のとり得る値の範囲を求めよ。 (8 点)

(2) (1)のとき，$I(a)=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx$ の最小値，およびそのときの $a$ の値を求めよ。 (17 点)

(1) $f(x) = x^2+2x+a$

$= (x+1)^2-1+a$

軸 $x=-1$

$D/4 = 1^2-a>0$

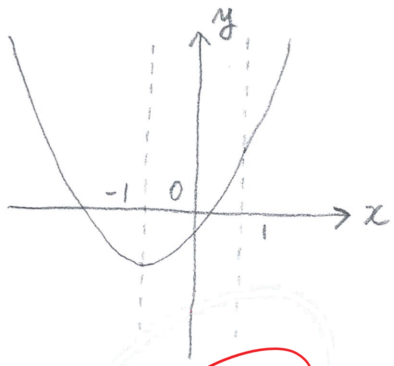
$a<1$ …①

$f(-1)=1-2+a<0$

$a<1$ …②

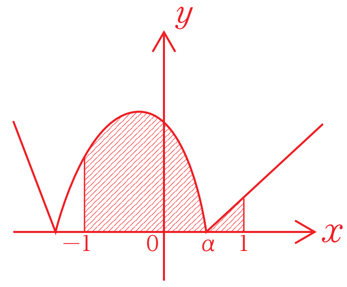
$f(1)=1+2+a>0$

$a>-3$ …③




よって $-3<a<1$

軸が $x=-1$ であることから，②をみたせば必ず $y=f(x)$ は $x$ 軸と2点で交わるので，この場合は①を調べなくてもよいことになります。




面積を求めるときは立式(☆)の根拠としてグラフをかくようにしましょう。

上図のようなグラフになり，面積は斜線部となります。

(2) $x^2+2x+a=0$

$x=-1\pm\sqrt{1-a}$ +2

$I(a)=\int_{-1}^{-1+\sqrt{1-a}}(-x^2-2x-a)\,dx+\int_{-1+\sqrt{1-a}}^{1}(x^2+2x+a)\,dx$ ☆

$-1+\sqrt{1-a}$ のまま計算していくと式が煩雑になりミスもしやすくなります。

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2-ax\right]_{-1}^{-1+\sqrt{1-a}}+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+ax\right]_{-1+\sqrt{1-a}}^{1}$ +5

$=-\frac{1}{3}(-1+\sqrt{1-a})^3-(-1+\sqrt{1-a})^2-a(-1+\sqrt{1-a})-(\frac{1}{3}-1+ax)$

$+\frac{1}{3}+1+ax-\left\{\frac{1}{3}(-1+\sqrt{1-a})^3+(-1+\sqrt{1-a})^2+a(-1+\sqrt{1-a})\right\}$

ここは2です

$=-\frac{1}{3}(-1+\sqrt{1-a})^3-2(-1+\sqrt{1-a})^2-2a(-1+\sqrt{1-a})+2$

− +

$=-\frac{1}{3}\left\{-1+3(1-a)-3\sqrt{1-a}+(1-a)\sqrt{1-a}\right\}-2\left\{1-2\sqrt{1-a}+(1-a)\right\}$

符号は慎重に。

$+2a-2a\sqrt{1-a}+2$

$=\frac{1}{3}-(1-a)+\sqrt{1-a}-\frac{1}{3}(1-a)\sqrt{1-a}-2+4\sqrt{1-a}-2(1-a)+2a-2a\sqrt{1-a}+2$

行き詰ってしまったようですね。ここは $\alpha=-1+\sqrt{1-a}$ とおいての $\alpha$ のまま積分計算をします。
増減を調べる際の微分も $\alpha$ のまま計算しましょう。

〈合格への一手〉

扱う式が複雑なときには，文字の有用性を最大限に利用したいところです。
本問のように方程式の解が分数や無理数になる場合のほか，単純に式が長い場合にも，時間短縮には有効です。
“できるだけシンプルな形で処理する”という観点を身につけておきましょう。