(1) 2　$9/12$

(2) 3　$0/13$

次の各問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とする。　　(25点)

(1)　$x>1$ のとき，$\log x<\sqrt{x}$ が成り立つことを示し，極限値 $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めよ。

(12点)

(2)　3つの正の数 a，b，c が

$$a^{bc}=b^{ca}=c^{ab}$$

をみたすとき，a，b，c のうち少なくとも2つは等しいことを示せ。　　(13点)

(1) $f(x)=\log x-\sqrt{x}$ とする。$f(x)$ が $x>1$ で常に負になることをいえばよい。

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2-\sqrt{x}}{2x}$$

$x>1$ のとき　$2x>0$ なので　$g(x)=2-\sqrt{x}$ の符号を考える

$x=4$ のとき　$g(x)=0$

$x<4$　〃　$g(x)>0$

$x>4$　〃　$g(x)<0$

増減表にしておくとよいでしょう。

x	1		4	
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	0	↘

$(\because\ 2-\sqrt{4})$

よって　$x>1$ のとき　$f(x)\leqq 0$ がいえるので成り立つ

$x>1$ も条件に加えます。

$\log x<\sqrt{x}$ より　$\frac{\log x}{x}<\frac{\sqrt{x}}{x}$

不等式では乗ずる数の正負に気をつけます。

$x>\sqrt{x}$ より　$\lim_{x\to\infty}\boxed{\frac{\sqrt{x}}{x}}=0$

不定形です。$\triangle -1$

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$としましょう。

従って　$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$

はさみうちの原理を用いるためには $0<\frac{\log x}{x}$ もおさえましょう。$\triangle -2$

(2) 辺々対数をとると

$bc\log a=ca\log b=ab\log c$

この辺々に $\frac{1}{abc}$ を乗じると

$\frac{\log a}{a}=\frac{\log b}{b}=\frac{\log c}{c}$　となり

(1) で扱った式の形がでてきますね。

$h(x)=\frac{\log x}{x}$ とすると

$bc\log a=ca\log b$ より　$\boxed{b\log a=a\log b \quad \therefore\ a=b}$

この式は常に成り立つわけではありません。

たとえば$a=2,b=4$とすると

$4\log 2=2\times 2\log 2=2\log 4$

同様に　$b=c$

$x=a,b,c$は$h(x)=k$の解といえます。これより どんなkについても$h(x)=k$となる実数のxの個数が高々2個であれば与式をみたすa,b,cがすべて異なることはないといえます。

そこで，$y=\frac{\log x}{x}$ のグラフをかいて調べてみましょう。

よって　$a^{bc}=b^{ca}=c^{ab}$ が成り立つとき

$a=b=c$

〈合格への一手〉

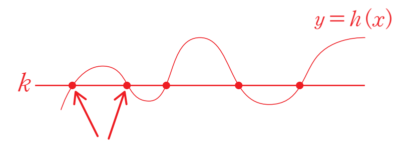
本問では「(1) と (2) の見た目が違うものの実は誘導になっている」という点に気づけたかどうかが大きなポイントでした。

「指数と対数で関連付けて考えられないか?」

「(1) と似た形が出てきたので，(1) を利用できないか?」

などの発想を普段から意識しておくとよいでしょう。

［「極意」を確認しましょう］



これらのx座標が$h(x)=k$の解となります。