5

20/25

$a>0$ とする。また，実数 x, y は $x^2+4y^2 \leqq 1$ をみたすとする。このとき，$2xy+ax+2ay$ の最大値と最小値，およびそのときの x, y の値を求めよ。 (25点)

$2y=z$ とおくと $x^2+4y^2\leqq 1$, $2xy+ax+2ay$ は

$x^2+z^2\leqq 1$ —①, $xz+a(x+z)$ —②

と表せる。

$x+z=X$, $xz=Y$ とおくと

①は $(x+z)^2-2xz\leqq 1$ ∴ $X^2-2Y\leqq 1$ —①'

対称式であることに注目したのですね。

②は $Y+aX$ —②'

と表せる。

また x, z は S の方程式

$S^2-(x+z)S+xz=0$ ∴ $S^2-XS+Y=0$ —③

の2実数解なので

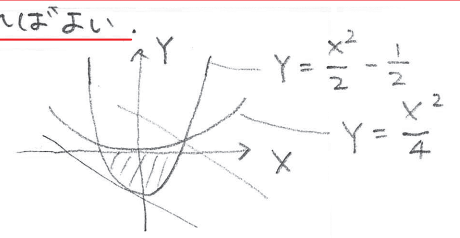
③の判別式を D とすると

$D=X^2-4Y\geqq 0$ —④

x,yについての条件により，X,Yのとり得る値の範囲が制限されることがあります。置換をした場合は，つねに気をつけましょう。

以上より ②'を k とおいて，XY平面上で ①'と④と直線 $k=Y+aX$ すなわち $Y=-aX+k$ が共有点をもつときの k の最大値と最小値を考えればよい。

グラフを利用して考えやすくしている点が非常にいいです。



〈合格への一手〉

xと$2y$の対称式であることに着目して答案が作成できています。最小値の考察でaについての場合分けができなかったところはあと一歩でした。(惜しかったです)

文字定数を含む直線や曲線の式を扱う場合は，定数の値によってグラフの形が変化することに注意しておきましょう。

k が最大となるのは，$Y=-aX+k$ が，$Y=\frac{X^2}{2}-\frac{1}{2}$ と $Y=\frac{X^2}{4}$ の交点 $(\sqrt{2},\frac{1}{2})$ を通るとき。

よって k の最大値は

$k=\sqrt{2}a+\frac{1}{2}$ (答)

このとき③は

$S^2-\sqrt{2}S+\frac{1}{2}=0$ ∴ $(S-\frac{1}{\sqrt{2}})^2=0$

これより $(x,y)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}})$ (答)

k が最小となるのは，$Y=-aX+k$ が $Y=\frac{X^2}{2}-\frac{1}{2}$ と接するとき。このとき

$-aX+k=\frac{X^2}{2}-\frac{1}{2}$ ∴ $X^2+2aX-2k-1=0$ —⑤

の判別式は0である。すなわち

$a^2-(-2k-1)=0$ ∴ $k=\frac{-a^2-1}{2}$

よって k の最小値は

$k=\frac{-a^2-1}{2}$ (答)

このとき⑤は

$X^2+2aX+a^2=0$ ∴ $(X+a)^2=0$

これより $X=-a$

これは正しいのですが，$Y=-aX+k$の傾きの値によっては，$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ を通るとき最小になる場合があります。

よって $Y=\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}$

このとき③は

$S^2+aS+\frac{1}{2}(a^2-1)=0$

「解答」のように，きちんと場合分けをして，もれのないようにしましょう。

これより

$(x,y)=\left(\frac{-a\pm\sqrt{2-a^2}}{2}, \frac{-a\mp\sqrt{2-a^2}}{4}\right)$ (複合同順) ← 忘れないように！

(答)