問題

次の各問いに答えよ。 (25点)

(1) 実数 x，y に対し，等式 $(x^2+1)(y^2+1)=(xy+1)^2+(x-y)^2$ が成り立つことを示せ。 (6点)

(2) 実数 x，y に対し，不等式 $x^2-2xy+3y^2\geqq 0$ がつねに成り立つことを示せ。(6点)

(3) 等式 $x^2+(k-1)x-2k-2=0$ が k の値にかかわらず成り立つような x の値を求めよ。 (6点)

(4) $x>1$ のとき，$x-1+\dfrac{1}{x-1}$ の最小値を求めよ。また，最小値をとる x の値を求めよ。 (7点)

着眼

式と証明からの出題。盲点となりやすい分野なので，基本をしっかり確認しておこう。

(1) 左辺と右辺をそれぞれ整理すればよい。

(2) x，y についての 2 次式であることと，「$\geqq 0$」を示すことに着目して

平方完成する(2 乗の形をつくる)

ことを考えればよい。

(3) 「k の値にかかわらず」とあるので k の恒等式とみればよく，k について整理するのが第一歩。

(4) $○+\dfrac{1}{○}$ という形をしているので，相加・相乗平均の関係を用いればよい。

解答

(1) 与式の左辺と右辺はそれぞれ

$$(x^2+1)(y^2+1)=x^2y^2+x^2+y^2+1$$

$$\begin{aligned}(xy+1)^2+(x-y)^2&=x^2y^2+2xy+1+x^2-2xy+y^2\\&=x^2y^2+x^2+y^2+1\end{aligned}$$

となるので

$$(x^2+1)(y^2+1)=(xy+1)^2+(x-y)^2$$

が成り立つ。 (証終)

(2) 与式の左辺は

$$x^2-2xy+3y^2=(x-y)^2-y^2+3y^2=(x-y)^2+2y^2$$

◀ x の 2 次関数とみて平方完成する。

よって，$(x-y)^2\geqq 0$，$2y^2\geqq 0$ なので

$$x^2-2xy+3y^2\geqq 0$$

がつねに成り立つ。 (証終)

◀ 等号は
$x-y=0$ かつ $y=0$
つまり，$x=y=0$ のときに成り立つ。

(3) 与式の左辺を k について整理すると

$$(x-2)k+x^2-x-2=0$$

これが k の値にかかわらず成り立つので

$$x=2 \text{ かつ } x^2-x-2=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

◀ ①の 2 式をみたす x が答なので，$x^2-x-2=0$ が成り立つことも確認しておくこと。

$x=2$ のとき $x^2-x-2=0$ なので，求める x の値は

$x=2$ (答)

(4)　$x>1$ より $x-1>0$ なので，相加・相乗平均の関係より

$$x-1+\frac{1}{x-1} \geqq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}=2$$

が成り立つ。また，等号成立条件は

$$x-1=\frac{1}{x-1} \qquad \therefore \quad (x-1)^2=1$$

$x-1>0$ なので

$$x-1=1 \qquad \therefore \quad x=2$$

以上より，$x-1+\dfrac{1}{x-1}$ は

$x=2$ のとき，最小値 2　　(答)

をとる。

解説

補足　等式・不等式の証明

等式 $A=B$ を証明するときは

(ア)　A か B の一方を変形して，他方を導く

(イ)　A，B をそれぞれ変形して，同じ式を導く

(ウ)　$A-B=0$ であることを示す

といった方針が有効である。どれも本質的には同じことではあるが，示す式の形を見てラクな方針を選ぶのがよいだろう。(1)では(イ)の方針で証明したわけだ((ウ)の方針でもそれほど大差ない)。

また，不等式 $A>B$ を証明するときは

$A-B>0$ であることを示す

という方針が有効であり，さらに，$A-B$ の部分を

(正の数)＋(正の数)，(正の数)×(正の数)

のように変形するとうまくいくことが多い。(2)では，(実数)$^2 \geqq 0$ であることに着目して

(0 以上の数)＋(0 以上の数)

の形をつくったわけだ(等号が入っても同じこと)。他にも，平方根や絶対値を含む式の場合

両辺が正であることを確認して両辺を 2 乗した式を示す

という方針も有効である。以下の例題で確認してみよう。

〔例題〕　$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ を示せ。

(考え方)

この例題では，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，$\sqrt{a+b}>0$ なので

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$$

を示すのが目標であり，上記の方針に従って (左辺)－(右辺) を考える。根号が少なくなって扱いやすくなるわけだ。

(解答)　$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)=2\sqrt{ab}>0$

より

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$$

が成り立つ。よって，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，$\sqrt{a+b}>0$ なので

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$$

が成り立つ。　　(証終)

証明問題では，ただやみくもに式変形するのではなく，上記のような方針を念頭において考えることを心がけよう。