5章

図形と方程式(点・直線)：ポイント整理

PM25J1-Z1J1-01
学習時間のめやす 15分

1． 2 点間の距離

今回から「図形と方程式」を学習する．これは方程式の考え方を導入して図形問題を考えるもので，数学II・Bの中でも重要な分野である．新しい内容も多く学習するので，じっくりと取り組んでほしい．

まず，座標平面上の 2 点間の距離を表す公式を示しておこう．これは基本的な公式で，3 平方の定理から容易に証明できる．

重要ポイント1 2 点間の距離

点 A$(x_1,\ y_1)$ と点 B$(x_2,\ y_2)$ の間の距離は

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

とくに，原点 O$(0,\ 0)$ と点 A$(x,\ y)$ の間の距離は

$$\sqrt{x^2+y^2}$$

2． 内分点・外分点

重要ポイント2 内分点・外分点

2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ に対し，線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

また，線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$$

内分・外分とも，分子の係数に注意してほしい．たとえば内分だと，x 座標は

$$\frac{nx_1+mx_2}{m+n}$$

すなわち，x_1 の係数が n，x_2 の係数が m で，比が入れ替わった形になっている．y 座標についても同じだ．

外分については，“$m:n$ に外分する”を“$m:(-n)$ に内分する”とみて

$$\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m+(-n)},\ \frac{-ny_1+my_2}{m+(-n)}\right)$$

と考えることにすれば，内分点の公式と同じ形に帰着される(あるいは，“$(-m):n$ に内分する”とみてもよい．同じ結果が得られることを各自確認せよ)．

なお，3 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ を頂点とする △ABC の重心の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

である．これは，線分 BC の中点(線分 BC を 1：1 に内分する点)を M とし，線分 AM を 2：1 に内分する点として求められる．これも確認しておこう．

3．直線の方程式

一般に，“直線上の 1 点の座標と傾き” がわかると，直線の方程式は決定できるのであった．

重要ポイント3　直線の方程式 1

点 $(x_0,\ y_0)$ を通り，傾き m の直線の方程式は

$$y-y_0=m(x-x_0) \quad \cdots\cdots(*)$$

$(*)$の形より，これは傾きが m である直線の方程式であることは明らかだろう．また，$(*)$に $x=x_0$，$y=y_0$ を代入すると等号が成立するため，この直線は点 $(x_0,\ y_0)$ を通るわけだ．

また，“直線上の 2 点の座標” がわかっても，直線の方程式は決定できるのであった．

重要ポイント4　直線の方程式 2

2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は

(Ⅰ) $x_1=x_2$ のとき，$x=x_1$

(Ⅱ) $x_1 \neq x_2$ のとき，$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

(Ⅰ)は明らかだろう．$x_1 \neq x_2$ のときは，この直線の傾きが $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ と表されることから，これを「重要ポイント 3」にあてはめることで(Ⅱ)が得られる．

なお，(Ⅱ)の分母を払って整理すると

$$(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$$

となる．この式は $x_1=x_2$ のときも成り立つので，(Ⅰ)，(Ⅱ)をまとめた形といえる．

4．2 直線の平行条件・垂直条件

重要ポイント5　2 直線の平行条件

2 直線 $y=mx+n$，$y=m'x+n'$ が平行であるための条件は

$$m=m'$$

また，2 直線 $ax+by+c=0$，$a'x+b'y+c'=0$ が平行であるための条件は

$$ab'-ba'=0$$

上の条件に加えて，$n=n'$ あるいは $ac'=ca'$ が成り立つとき，2 直線は一致する．問題によっては，2 直線が一致する場合を 2 直線が平行である場合に含まないこともあるので，注意しよう．

重要ポイント6

2直線の垂直条件

2直線 $y=mx+n$，$y=m'x+n'$ が垂直であるための条件は

$$mm'=-1$$

また，2直線 $ax+by+c=0$，$a'x+b'y+c'=0$ が垂直であるための条件は

$$aa'+bb'=0$$

2直線のうちどちらかが座標軸に平行であれば，$mm'=-1$ は使えない．しかし，これ以外の場合は $mm'=-1$ の利用が効果的である．たとえば，直線 $y=\frac{2}{3}x+1$ に垂直な直線は，その傾きを m とすると

$$\frac{2}{3}\cdot m=-1 \qquad \therefore \quad m=-\frac{3}{2}$$

であるから，$y=-\frac{3}{2}x+n$ とおける．あとは，通る点などの条件から n の値を定めればよい．

5．点と直線の距離

重要ポイント7

点と直線の距離

点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

公式の形が少し複雑だが，しっかりモノにしてほしい．

(分子)＝(直線の方程式にPの座標を代入したものの絶対値)

(分母)＝(x，y の係数の2乗の和の平方根)

である．

また，直線の方程式は，必ず $ax+by+c=0$ の形に直した上で，公式を適用すること．

(例) 点 $(1,\ 1)$ と直線 $y=\frac{3}{4}x+n$ の距離が1であるとき，n の値を求める．

$y=\frac{3}{4}x+n$ を変形すると，$3x-4y+4n=0$ となる．これと点 $(1,\ 1)$ との距離は

$$\frac{|3\cdot1-4\cdot1+4n|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|4n-1|}{5}$$

これが1であるから

$$|4n-1|=5$$

$$\Longleftrightarrow\ 4n-1=\pm5$$

$$\therefore \quad n=\frac{3}{2},\ -1$$

図形と方程式(点・直線)：重要例題

例題 1

☞ 重要ポイント 1，2

xy 平面上に，3 点 A$(3,\ 6)$，B$(-3,\ 0)$，C$(0,\ -3)$ があり，線分 AB を 1：2 に内分する点をD，線分 BC を 1：2 に外分する点をEとする．このとき，次の各問に答えよ．

（1） D，Eの座標をそれぞれ求めよ．

（2） △ABC の重心Gの座標を求めよ．

（3） (2)のGに対して，線分 DG の長さを求めよ．

着眼 xy 平面上の線分の内分点，外分点の座標，3 角形の重心の座標，2 点間の距離の求め方を確認する問題．

（1）「重要ポイント 2」で紹介した分点公式にあてはめるだけだが，符号の扱いにはくれぐれも注意してもらいたい．

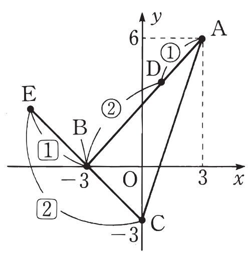
（2） △ABC の 3 つの頂点の座標は与えられているので，これらから重心の座標を得るためには….

（3） (1)，(2)において，D，Gの座標は求めてあるので，2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ の間の距離が

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となることを利用すればよい．

解答 （1） D は線分 AB を 1：2 に内分する点であるから，内分点の公式より，D の x 座標と y 座標は



$$\frac{2\cdot3+1\cdot(-3)}{1+2}=\frac{3}{3}=1,$$

$$\frac{2\cdot6+1\cdot0}{1+2}=\frac{12}{3}=4$$

∴ **D$(1,\ 4)$** (答)

← P$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$ に対して，線分 PQ を $m：n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

$m：n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$$

次に，E は線分 BC を 1：2 に外分する点であるから，外分点の公式より，E の x 座標と y 座標は

$$\frac{-2\cdot(-3)+1\cdot0}{1-2}=\frac{6}{-1}=-6,$$

$$\frac{-2\cdot0+1\cdot(-3)}{1-2}=\frac{-3}{-1}=3$$

∴ **E$(-6,\ 3)$** (答)

（2） △ABC の重心Gの x 座標と y 座標は

$$\frac{3+(-3)+0}{3}=\frac{0}{3}=0,\quad \frac{6+0+(-3)}{3}=\frac{3}{3}=1$$

∴ **G$(0,\ 1)$** (答)

← A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ に対して，△ABC の重心の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

（3） (1)，(2)の結果と，2 点間の距離の公式より

$$\begin{aligned}\mathrm{DG}&=\sqrt{(0-1)^2+(1-4)^2}\\&=\sqrt{1+9}\\&=\sqrt{10}\end{aligned}$$ (答)

← 「着眼」の$(*)$．

例題2

☞ 重要ポイント４，７

xy 平面上に，３点 A(2，5)，B(−6，1)，C(−4，7) がある．このとき，次の各問に答えよ．

（１）直線 AB の方程式を求めよ．

（２）C と直線 AB の距離を求めよ．

（３）△ABC の面積を求めよ．

着眼 △ABC の面積を求める過程において，直線の方程式や点と直線の距離の求め方を確認してもらう．

（１）一般に，xy 平面上の２点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ $(x_1 \neq x_2)$ を通る直線の方程式は

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \cdots\cdots(*)$$

と表されるので…．

（２）ここでは，点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離が

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \cdots\cdots(☆)$$

であることを利用しよう．

（３）３角形の面積の求め方はいろいろあるが，本問では，（２）の結果を利用する方針で考えてみよう．△ABC の底辺を線分 AB とみると，高さは（２）で求めた距離に他ならないので…．

解答

（１） ２点 A(2，5)，B(−6，1) を通る直線の方程式は

$$y-5=\frac{1-5}{(-6)-2}(x-2) \iff y-5=\frac{1}{2}(x-2)$$
$$\iff 2(y-5)=x-2$$
$$\iff 2y-10=x-2$$

← 「着眼」の(＊)．

よって，求める直線 AB の方程式は

$$\boldsymbol{x-2y+8=0} \quad \text{（答）} \quad \cdots\cdots①$$

← （２）を見越して，一般形で答えたが

$$y=\frac{1}{2}x+4$$

を答としてもよい．

（２） 求める C と直線 AB との距離を d とすると，①より

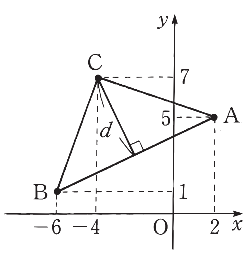
$$d=\frac{|-4-2\cdot7+8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{2\sqrt{5}} \quad \text{（答）}$$

← 「着眼」の(☆)．

（３） △ABC の底辺を線分 AB とみると，高さは（２）の d に他ならない．

← このことに気づくのがポイント．

ここで，２点間の距離の公式より



$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\sqrt{(-6-2)^2+(1-5)^2}\\&=\sqrt{64+16}\\&=\sqrt{80}\\&=4\sqrt{5}\end{aligned}$$

← 「例題１」の「着眼」の（＊）．

であるから，求める △ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot d=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}$$
$$=\boldsymbol{20} \quad \text{（答）}$$

← （３角形の面積）$=\frac{1}{2}\times$(底辺)$\times$(高さ)

例題3

☞ 重要ポイント5，6

xy 平面上に，2直線 ℓ：$(k+1)x-ky+k+2=0$，m：$2x-y+5=0$ があるとき，次の各問に答えよ．ただし，k は実数の定数とする．

（1） ℓ と m が垂直のとき，k の値を求めよ．

（2） ℓ と m が平行のとき，k の値を求めよ．

（3） ℓ は k の値に関係なくある定点を通る．その定点の座標を求めよ．

着眼 2直線の垂直条件・平行条件，直線の定点通過についての問題に取り組んでもらう．

（1）一般に，2直線 ℓ_1：$ax+by+c=0$，ℓ_2：$a'x+b'y+c'=0$ に対して

$\ell_1 \perp \ell_2 \iff aa'+bb'=0$ ……………………(＊)

が成り立つことを利用すればよい．

（2）本問では，上記のような2直線 ℓ_1，ℓ_2 に対して

$\ell_1 /\!/ \ell_2 \iff ab'-ba'=0$ ……………………(☆)

が成り立つことを利用するのがコツ．

（3）このような問題では，直線 ℓ の方程式を

$X+kY=0$ （X と Y はそれぞれ x と y の整式） ……………(※)

のように k についてまとめて処理するのが定石．“k の値に関係なく定点を通る”ということは，どのような k の値に対しても(※)が成り立つということであるから….

解答 （1）条件より，ℓ と m は垂直であるから

$(k+1)\cdot 2+(-k)\cdot(-1)=0 \iff 3k+2=0$

∴ $\boldsymbol{k=-\dfrac{2}{3}}$ （答）

← 「着眼」の(＊)．なお，ℓ と m の傾きをそれぞれ求めて処理することもできる．

（2）条件より，ℓ と m は平行であるから

$(k+1)\cdot(-1)-(-k)\cdot 2=0 \iff k-1=0$

∴ $\boldsymbol{k=1}$ （答）

← 「着眼」の(☆)．

（3）ℓ の方程式を k について整理すると

$(x+2)+k(x-y+1)=0$

となる．この等式は

$x+2=0$ かつ $x-y+1=0$

∴ $x=-2$，$y=-1$

のとき，任意の k の値に対して成り立つので，ℓ は k の値に関係なくある定点を通る．よって，求める定点の座標は

$\boldsymbol{(-2,\ -1)}$ （答）

← このように，k についてまとめるのがコツ．これが k についての恒等式となるような x，y の値の組を求めればよい．

解説 （3）「**解答**」における考え方を応用すると，異なる2直線

$ax+by+c=0$

$a'x+b'y+c'=0$ ……………………①

が点Aで交わるとき，交点Aを通る直線のうち，①以外のものは

$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ （k は定数）

の形で表されることがわかる．このことはしっかり押さえておこう．