添削問題解答解説

高3東大即応演習 3月 数学

ZMFKC1-Z1C1-01

1 問題

ボールが1個入っている箱が4つある。このとき

(i) 無作為に1つの箱を選び，他の箱に入っているボールの数と比較する。選ばれた箱に入っているボールの数よりもボールが多く入っている箱があるときは，最もボールが多い箱からボールを1個取り出し，選ばれた箱にうつす。そうでないときは，他の箱の1つからボールを1個取り出し，選ばれた箱にうつす。

(ii) ボールが入っていない箱を取り除く。

という操作を，箱が1つになるまで繰り返す。n を自然数とするとき，n 回目の操作後，初めて箱が1つになる確率を求めよ。　(50点)

ポイント

やや複雑な設定から題意を的確に捉えることがカギとなる確率の問題であり，東大入試で頻出のタイプといえる。状態の推移を図をかいて把握することが第一歩であり，図をもとに状態の推移と数式とを的確に関連付けていくことが大切。

1回目の操作では，どの箱が選ばれても箱の数が3つに減るので，2回目以降の操作がポイント。箱の数は

3つ $\longrightarrow$ 2つ $\longrightarrow$ 1つ

と変化するので，「3つ $\longrightarrow$ 2つ」「2つ $\longrightarrow$ 1つ」となるときの箱の選び方をそれぞれ考えればよい。そこで

・箱が3つある状態が何回あるか　　・箱が2つある状態が何回あるか

に注目して題意の確率を求めてみよう。このとき，ボールの数の組が $(3,\ 1) \longrightarrow (2,\ 2)$ となると，次の操作で必ず $(2,\ 2) \longrightarrow (3,\ 1)$ となることから

$(3,\ 1) \longrightarrow (2,\ 2)$ となる回数を文字でおく（◀1）

と処理がしやすくなる。

解　答

ボールの数の組が $(3,\ 1) \longrightarrow (2,\ 2)$ となる確率は $\dfrac{1}{2}$ であり，その回数を $k\ (k=0,\ 1,\ \ldots)$ とおくと，$(2,\ 2) \longrightarrow (3,\ 1)$ は確率1で k 回起こる。また，箱の数が減る

$(1,\ 1,\ 1,\ 1) \longrightarrow (2,\ 1,\ 1)$
$(2,\ 1,\ 1) \longrightarrow (3,\ 1)$
$(3,\ 1) \longrightarrow (4)$

は，それぞれ $1,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}$ の確率で1回だけ起こるので，$(2,\ 1,\ 1) \longrightarrow (2,\ 1,\ 1)$ は $\dfrac{2}{3}$ の確率で

$$n-(k+k+3)=n-2k-3\ (\text{回})$$

起こる。よって，$(3,\ 1) \longrightarrow (2,\ 2)$ となる回数が k のときの確率は

◀1
このように文字でおくのがポイント。「解説1」のような図をかいて考えるとわかりやすい。

$$1\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2k-3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\times 1^k\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}\left(\frac{9}{8}\right)^{k}$$

ここで，k のとり得る値の範囲は

$$k\geqq 0 \text{ かつ } n-2k-3\geqq 0 \qquad \therefore\quad 0\leqq k\leqq\frac{n-3}{2}$$

であるから，n の偶奇で場合を分けて考える。

◀n の偶奇によって k のとり得る値が異なることに注意。

(Ⅰ) $n=2m\ (m=2,\ 3,\ \cdots)$ のとき，k のとり得る値は

$$k=0,\ 1,\ \cdots,\ m-2$$

であるから，求める確率は

$$\sum_{k=0}^{m-2}\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{2m-3}\left(\frac{9}{8}\right)^{k}=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{2m-3}\cdot\frac{\left(\frac{9}{8}\right)^{m-1}-1}{\frac{9}{8}-1}$$
$$=2\left(\frac{4}{9}\right)^{m-1}\left\{\left(\frac{9}{8}\right)^{m-1}-1\right\}$$
$$=2\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}-\left(\frac{4}{9}\right)^{m-1}\right\}$$

これは，$m=1$ のときも成り立つ。

◀$m=1\ (n=2)$ のときに箱が初めて 1 つになる確率は 0 である。

(Ⅱ) $n=2m+1\ (m=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき，k のとり得る値は

$$k=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1$$

であるから，求める確率は

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{2m-2}\left(\frac{9}{8}\right)^{k}=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{2m-2}\cdot\frac{\left(\frac{9}{8}\right)^{m}-1}{\frac{9}{8}-1}$$
$$=3\left(\frac{4}{9}\right)^{m}\left\{\left(\frac{9}{8}\right)^{m}-1\right\}$$
$$=3\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{m}-\left(\frac{4}{9}\right)^{m}\right\}$$

これは，$m=0$ のときも成り立つ。

◀$m=0\ (n=1)$ のときに箱が初めて 1 つになる確率は 0 である。

以上より，求める確率は

n が偶数のとき， $2\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}-\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1}\right\}$

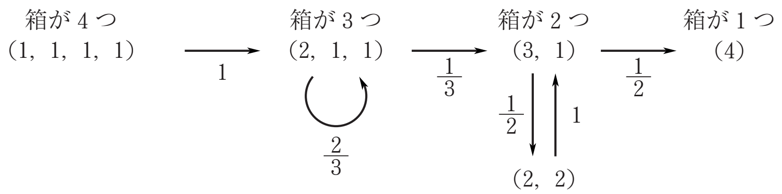
n が奇数のとき， $3\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}-\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\}$ 答

である。

解　説

1 補足 箱の数とボールの数の組の変化を図で表す

箱の数とボールの数の組および，これらの状態に移る確率を図で表すと次頁のようになる。



状態の変化が一目瞭然となり，数式に落とし込む際に考えやすくなるだろう。このような図をスラスラとかけるようになってほしい。

2 別解 漸化式の利用

箱の数やボールの数の組は1回前の状態によって変わるので，漸化式を利用する方針も有効である。東大ではこの方針がカギになる問題もよく見られるが，経験が少ないと使いこなすのが難しい。この機会にしっかり確認しておこう。

n 回の操作後に (3, 1)，(2, 2) である確率をそれぞれ p_n，q_n とおく。

$n+1$ 回目の操作後に (3, 1) となるのは，$n+1$ 回目の操作で

(ア) (2, 1, 1) ⟶ (3, 1) となる場合

(イ) (2, 2) ⟶ (3, 1) となる場合

の2つがある。

ここで，n 回目の操作後に (2, 1, 1) となるのは

1回目の操作で，(1, 1, 1, 1)⟶(2, 1, 1) となり，

2回目から n 回目の操作で，(2, 1, 1)⟶(2, 1, 1) を $n-1$ 回繰り返す場合

であるから，この確率は $n \geqq 2$ のとき

$$1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

これは $n=1$ のときもみたす。

よって，(ア)，(イ)より

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+q_n \quad \cdots\cdots ①$$

また，$n+1$ 回目の操作後に (2, 2) となるのは，$n+1$ 回目の操作で

(ウ) (3, 1) ⟶ (2, 2) となる場合

であるから

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}p_n \quad \cdots\cdots ②$$

ゆえに，①，②と $q_1=q_2=0$ より

$$p_2=\frac{1}{3},\ p_3=\frac{2}{9},\ p_{n+2}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{2}p_n \quad (n=2,\ 3,\ \cdots) \quad \cdots\cdots ③$$

となるから，n の偶奇で場合を分けて，この漸化式を解けばよい。

$n=2m\ (m=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき，$p_{2m}=a_m$ とおくと③は

$$a_1=\frac{1}{3},\ a_{m+1}=\frac{1}{2}a_m+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2m}$$

これを解くと

$$p_{2m}=a_m=6\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^m-\left(\frac{4}{9}\right)^m\right\} \qquad \therefore\ p_n=6\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}-\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$$

となる。

$n=2m+1\,(m=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき，$p_{2m+1}=b_m$ とおくと③は

$$b_1=\frac{2}{9},\ b_{m+1}=\frac{1}{2}b_m+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2m+1}$$

これを解くと

$$p_{2m+1}=b_m=4\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^m-\left(\frac{4}{9}\right)^m\right\}\qquad \therefore\quad p_n=4\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}-\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\}$$

となる。

そして，n 回目の操作後に初めて箱が 1 つになるのは，n 回目の操作で

(エ)　$(3,\ 1)\longrightarrow(4)$ となる場合

であるから，求める確率は

$$\frac{1}{2}p_{n-1}$$

以上より，求める確率は

n が偶数のとき，$2\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}-\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1}\right\}$

n が奇数のとき，$3\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}-\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\}$

となる。これは，$n=1,\ 2$ のときも成り立つ。

東大の求めるレベル

本問が東大理系で出題される確率の問題の標準的な難度。東大対策を始めたばかりのみなさんにとって難しく，思うように得点できなかった人が多いだろう。

箱が 2 つである場合について，ボールの数の組が 2 通りあり，ここが状況を複雑にしている。このような場合は

「**解説 1**」のように，状態の変化を図を用いて整理する

ことが第一歩。そして，この図をフルに活用して

- 「**解答**」のように文字 k を自分で設定する
- 「**解説 2**」のように漸化式を立てる

といった数式との関連づけを意識しよう。糸口が探りやすくなるし，本問のカギである場合分けにも気づきやすくなる。

また，煩雑な指数計算を速く正確に行うことが要求される。東大理系では，確率の問題に限らず処理力を試す問題が頻出。計算ミスで失点をすることのないように，対策をきちんと行っていこう！