2 問題

ボールが1個入っている箱が4つある。このとき

(i) 無作為に1つの箱を選び，他の箱に入っているボールの数と比較する。選ばれた箱に入っているボールの数よりもボールが多く入っている箱があるときは，最もボールが多い箱からボールを1個取り出し，選ばれた箱にうつす。そうでないときは，他の箱の1つからボールを1個取り出し，選ばれた箱にうつす。

(ii) ボールが入っていない箱を取り除く。

という操作を，箱が1つになるまで繰り返す。以下，n は自然数とする。　(50点)

(1) n 回目の操作後，箱が3つある確率を求めよ。　(10点)

(2) $2n$ 回目の操作後，箱が2つある確率を求めよ。　(28点)

(3) $2n+1$ 回目の操作後，初めて箱が1つになる確率を求めよ。　(12点)

ポイント

やや複雑な設定から題意を的確に捉えることがカギとなる確率の問題であり，東大入試で頻出のタイプといえる。状態の推移を図をかいて把握することが第一歩であり，図をもとに状態の推移と数式とを的確に関連づけていくことが大切。

(1) 1回目の操作では，どの箱が選ばれても箱の数が3つに減るので，2回目以降の操作がポイント。3つの箱に入っているボールの数の組は(2, 1, 1)であり，2個のボールが入った箱が選ばれると箱の数は2つになってしまうので …。

(2) (1)と同様に考えればよい。つまり，箱の数は増えないので

・箱の数がいつ2つに減るか　　・箱の数が2つになったあとの箱の選び方

に着目する。このとき，2つの箱に入っているボールの数の組は，(2, 2) ⟶ (3, 1) ⟶ (2, 2) ⟶ (3, 1) を繰り返すが，(2, 2) ⟶ (3, 1) の確率と，(3, 1) ⟶ (2, 2) の確率は異なる。よって，**箱の数がいつ2つに減るかによって場合分けが生じる（◀1）**ことに注意しよう。

(3) $2n+1$ 回目の操作後，箱の数が2つから1つに減るので

$2n$ 回目の操作後のボールの数の組は(3, 1)

である。**(2)の考察から，このような場合をモレなく捉える（◀2）**ところがカギとなる。

解 答

(1) 1回目の操作後に箱の数は3つに減り，ボールの数の組は

(2, 1, 1)

となる。この状態から，次の操作を行うと

(ｱ) 1個のボールが入った箱が選ばれると，箱の数は3つのままで，ボールの数の組も(2, 1, 1)のままである。

(ｲ) 2個のボールが入った箱が選ばれると，箱の数は2つに減り，ボールの数の組は(3, 1)になる。

の2つの場合があり，それぞれの確率は

(ｱ) $\dfrac{2}{3}$　　(ｲ) $\dfrac{1}{3}$

◀確率1で
(1, 1, 1, 1)
⟶ (2, 1, 1)
となる。

である。

よって，n 回目の操作後に箱が 3 つあるのは，2 回目から n 回目までの操作で (ア) が繰り返されるときなので，確率は $n \geqq 2$ のとき

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$ 答

これは $n=1$ のときもみたす。

(2) 箱の数が 2 つに減ったとき，ボールの数の組は (3, 1) である。この状態から，次の操作を行うと

(ウ)1 個のボールが入った箱が選ばれると，箱の数は 2 つのままで，ボールの数の組は (2, 2) になる。

(エ)3 個のボールが入った箱が選ばれると，箱の数は 1 つに減る。

の 2 つの場合があり，いずれの確率も $\frac{1}{2}$ である。また，ボールの数の組が (2, 2) のとき，次の操作後に確率 1 で (3, 1) となる。

よって，k 回目の操作後に箱の数が 2 つに減ったとすると，

(Ⅰ) $k=2l$ ($l=1, 2, \cdots, n$) のとき，$2n$ 回目の操作後にボールの数の組は (3, 1) となる。箱の数が 2 つに減ったあとの操作の回数は $2n-2l$ 回であり，$(3,\ 1) \longrightarrow (2,\ 2) \longrightarrow (3,\ 1)$ を $n-l$ 回繰り返す。

したがって，$k=2l$ のときの確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2l-2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-l} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{8}{9}\right)^{l}$$

(Ⅱ) $k=2l+1$ ($l=1, 2, \cdots, n-1$) のとき，$2n$ 回の操作後にボールの数の組は (2, 2) となる。箱の数が 2 つに減ったあとの操作の回数は $2n-(2l+1)$ 回であり，$(3,\ 1) \longrightarrow (2,\ 2) \longrightarrow (3,\ 1)$ を $n-l-1$ 回繰り返し，最後に，$(3,\ 1) \longrightarrow (2,\ 2)$ となる。

したがって，$k=2l+1$ のときの確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2l-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-l-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{8}{9}\right)^{l}$$

以上より，求める確率は $n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{8}{9}\right)^{l} + \sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{8}{9}\right)^{l}$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1-\left(\frac{8}{9}\right)^{n}}{1-\frac{8}{9}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1-\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}}{1-\frac{8}{9}}$$

$$= 10\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - \frac{21}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^{n}$$ 答

これは $n=1$ のときもみたす。

◀1
k の偶奇で場合分け。

◀あとで l を変化させて和を考えるので，このように n と l を分けて整理するとよい。

◀等比数列の和の公式より。

(3)　題意をみたすのは，$2n$ 回目の操作後にボールの数の組が (3，1) であり，かつ，$2n+1$ 回目の操作で 3 個のボールが入った箱が選ばれる場合である。$2n$ 回目の操作後にボールの数の組が (3，1) であるのは，(2)の (Ⅰ) の場合なので，求める確率は

$$\left\{\sum_{l=1}^{n}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{8}{9}\right)^l\right\}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{8}{9}\right)^n}{1-\frac{8}{9}}$$
$$=\boldsymbol{3\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}}$$ 答

◀$2n$ 回目までの操作において，箱の数が 1 つになってはいけない。

◀2
(2)の考察を活用して，確率を求める。

解説

1 補足 箱の数とボールの数の組の変化を図で表す

箱の数とボールの数の組および，これらの状態に移る確率を図で表すと

$$\begin{tikzcd}
\substack{\text{箱が 4 つ}\\(1,\ 1,\ 1,\ 1)} \arrow[r, "1"'] & \substack{\text{箱が 3 つ}\\(2,\ 1,\ 1)} \arrow[loop below, "\frac{2}{3}"] \arrow[r, "\frac{1}{3}"'] & \substack{\text{箱が 2 つ}\\(3,\ 1)} \arrow[r, "\frac{1}{2}"'] \arrow[d, shift right, "\frac{1}{2}"'] & \substack{\text{箱が 1 つ}\\(4)} \\
 & & (2,\ 2) \arrow[u, shift right, "1"'] &
\end{tikzcd}$$

のようになる。状態の変化が一目瞭然となり，数式に落とし込む際に考えやすくなるだろう。このような図をスラスラとかけるようになってほしい。

2 別解 漸化式の利用

箱の数やボールの数の組は 1 回前の状態によって変わるので，漸化式を利用する方針も有効である。東大ではこの方針がカギになる問題もよく見られるが，経験が少ないと使いこなすのが難しい。この機会にしっかり確認しておこう。

いま，n 回目の操作後にボールの数の組が (2，1，1)，(3，1)，(2，2) となる確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とおくと，「**解説 1**」の図より

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}p_n \quad\cdots\cdots ①$$
$$q_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+r_n \quad\cdots\cdots ②$$
$$r_{n+1}=\frac{1}{2}q_n \quad\cdots\cdots ③$$

となる。

(1)は，$p_1=1$ に注意して①を解けば

$$p_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

が得られる。そして，(2)は

$$q_{2n}+r_{2n}$$

また，(3)は

$$\frac{1}{2}q_{2n}$$

が答えなので，q_{2n}，r_{2n} を求めることが目標になる。

②，③より

$$q_{n+2}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{2}q_n\quad(n=1,\ 2,\ \cdots),\ q_1=0,\ q_2=\frac{1}{3}$$

であるから，n の偶奇で場合を分けて，この漸化式を解けばよい。

$n=2m\,(m=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき，$q_{2m}=a_m$ とおくと

$$a_{m+1}=\frac{1}{2}a_m+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^m,\ a_1=\frac{1}{3}$$

また，$n=2m-1\,(m=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき，$q_{2m-1}=b_m$ とおくと

$$b_{m+1}=\frac{1}{2}b_m+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^m,\ b_1=0$$

となるので，それぞれ解くと

$$a_m=6\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^m-\left(\frac{4}{9}\right)^m\right\},\ b_m=4\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}-\left(\frac{4}{9}\right)^{m-1}\right\}$$

が得られる。

よって

$$q_{2n}=a_n=6\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}$$

$$r_{2n}=\frac{1}{2}q_{2n-1}=\frac{1}{2}b_n=2\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right\}$$

東大の求めるレベル

本問が東大文系で出題される確率の問題の標準的な難度。東大対策を始めたばかりのみなさんにとって(2)が難しく，思うように得点できなかった人が多いだろう。

箱が 2 つである場合について，ボールの数の組が 2 通りあり，ここが状況を複雑にしている。このような場合は

「**解説 1**」のように，状態の変化を図を用いて整理する

ことが第一歩。そして，この図をフルに活用して

・「**解答**」のように文字 k を自分で設定する

・「**解説 2**」のように漸化式を立てる

といった数式との関連づけを意識しよう。糸口が探りやすくなるし，本問のカギである場合分けにも気づきやすくなる。

また，(2)，(3)では，煩雑な指数計算を速く正確に行うことが要求される。東大文系では，確率の問題に限らず処理力を試す問題が頻出。計算ミスで失点をすることのないように，対策をきちんと行っていこう！