微積分

XMAD7A-Z1D1

総得点 39/50

1 XMAD7A-11C1

(1) 1 — 2/4

(2) 2 — 4/4

(3) 3 — 16/17

a を実数の定数とする。x の 3 次関数 $f(x)=x^3+3ax^2+6ax$ について，次の各問いに答えよ。（25 点）

（以下略）

(1) $f'(x)=3x^2+6ax+6a$

$= 3(x^2+2ax+2a)$

$f'(x)=0$ となる x があればよいから

判別式 $\frac{D}{4}=a^2-2a \geqq 0$ −2

よって

$a \leqq 0$ または $a \geqq 2$

$f'(x)=0$が重解αをもつとき，$f(x)$の増減は

x		α	
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗		↗

となり，$f(x)$は極値をもちません。

(2)

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}a \\ 3x^2+6ax+6a \,\big)\, x^3+3ax^2+6ax \\ x^3+2ax^2+2ax \\ \hline ax^2+4ax \quad 0 \\ ax^2+2a^2x+2a^2 \\ \hline (4a-2a^2)x-2a^2 \end{array}$$

余りは $(4a-2a^2)x-2a^2$

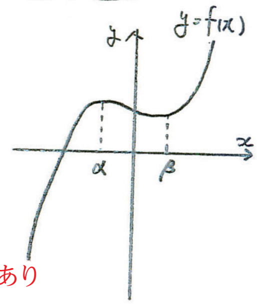
(3) α, β は $f'(x)=0$ の解なので

$x=-a\pm\sqrt{a^2-2a}$

$x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとるから

$\alpha=-a-\sqrt{a^2-2a}$

$\beta=-a+\sqrt{a^2-2a}$



(3) の計算では (2) を利用して計算の手間を省くことができます。
極値をとるxの値α，βは$f'(x)=0$の解であり
(2) より

$f(x)=f'(x)\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}a\right)+(4a-2a^2)x-2a^2$

となることを用います。極値の差を計算する問題は頻出なのでぜひ使えるようにしておきましょう。

よって

$f(\alpha)=(-a-\sqrt{a^2-2a})^3+3a(-a-\sqrt{a^2-2a})^2+6a(-a-\sqrt{a^2-2a})$

$=-a^3-3a^2\sqrt{a^2-2a}-3a(a^2-2a)-(a^2-2a)\sqrt{a^2-2a}$

$+3a(a^2+2a\sqrt{a^2-2a}+a^2-2a)-6a^2-6a\sqrt{a^2-2a}$

$=-a^3-\cancel{3a^3}+\cancel{6a^2}+\cancel{3a^3}+3a^3-\cancel{6a^2}-6a^2$

$+\sqrt{a^2-2a}(-3a^2-a^2+2a+6a^2-6a)$

計算間違い −1

6

$=2a^3-3a^2+(2a^2-4a)\sqrt{a^2-2a}$

$f(\beta)=(-a+\sqrt{a^2-2a})^3+3a(-a+\sqrt{a^2-2a})^2+6a(-a+\sqrt{a^2-2a})$

$=-a^3+3a^2\sqrt{a^2-2a}-3a(a^2-2a)+(a^2-2a)\sqrt{a^2-2a}$

$+3a(a^2-2a\sqrt{a^2-2a}+a^2-2a)-6a^2+6a\sqrt{a^2-2a}$

$=-a^3-\cancel{3a^3}+\cancel{6a^2}+3a^3+\cancel{3a^3}-\cancel{6a^2}-6a^2$

$+\sqrt{a^2-2a}(3a^2+a^2-2a-6a^2+6a)$

6

$=2a^3-3a^2+(-2a^2+4a)\sqrt{a^2-2a}$

$f(\alpha)-f(\beta)=(4a^2-8a)\sqrt{a^2-2a}=12\sqrt{3}$ なので

$(a^2-2a)\sqrt{a^2-2a}=3\sqrt{3}$

よって

$a^2-2a=3$

$a^2-2a-3=0$

$(a-3)(a+1)=0$

$\therefore a=3, -1$

$y=x^3$が単調増加であることより，実数A，Bに対して
$A^3=B^3 \Rightarrow A=B$
となることを利用したのですね。
このことがわかるように
$(a^2-2a)^{\frac{3}{2}}=3^{\frac{3}{2}}$
といったん変形するとよいでしょう。

（※解答欄は裏面に続きます。）

数学